Föreläsning 5, Linjär algebra AT.

Determinanten för en $n \times n$-matris definieras rekursivt enligt

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \text{ om } n = 2, \\
\det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}, \text{ om } n > 2,
\end{aligned}
$$

där A_{ij} är den matris man får om man tar bort rad i och kolumn j från A.

Kofaktorn (i,j) definieras som $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$. Determinanten kan beräknas genom utveckling längs godtycklig rad

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + \ldots + a_{in}C_{1n}$$

eller kolumn

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

Om A är triangulär så är $\det A$ produkten av elementen på diagonalen.

Elementära radoperationer ändrar determinanten enligt följande:

- Addera en rad till en annan: ingen påverkan.
- Byta plats på två rader: byter tecken.
- Multiplicera rad med tal k: multiplicerar med k.

Determinanten beräknas alltså effektivt m h a Gausselimination.

Följande gäller för determinanten:

- A inverterbar $\iff \det A \neq 0$
- $\det A^T = \det A$
- $\det AB = \det A \cdot \det B$

Cramers regel: A inverterbar matris. $A_j(\mathbf{b})$ är matrisen man får om man byter kolumn j i A till $\mathbf{b}$. Då gäller att lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ges av

$$x_j = \frac{\det A_j(\mathbf{b})}{\det A}.$$

Geometrisk tolkning av determinant i 2 och 3 dimensioner.

- Om A är 2×2-matris så gäller att $|\det A|$ är arean av parallellogrammet som spänns upp av kolumnerna i A.
- Om A är 3×3-matris så gäller att $|\det A|$ är volymen av parallellepipeden som spänns upp av kolumnerna i A.