Föreläsning 7, Linjär algebra AT.

En mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ är linjärt oberoende om

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

bara har trivial lösning $c_1 = \ldots = c_n = 0$.
En mängd $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för ett vektorrum V om

- B är linjärt oberoende
- $V = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$

Låt $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för V. Då kan varje $\mathbf{x} \in V$ skrivas som

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

med unika reella tal $c_1, \ldots, c_n$. Dessa kallas för $\mathbf{x}$ koordinater i basen B, $[\mathbf{x}]_B$.

Om $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ så är

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P_B[\mathbf{x}]_B$$

och omvänt

$$[\mathbf{x}]_B = P_B^{-1}\mathbf{x}$$

En isomorfi mellan två vektorrum V och W är en bijektiv linjär avbildning $\varphi : V \longrightarrow W$. Vi säger att V och W är isomorfa och skriver $V \cong W$.

Om $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för ett vektorrum V så är koordinatavbildningen $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ med $\varphi(x) = [\mathbf{x}]_B$ en isomorfi från V till $\mathbb{R}^n$.

Om ett vektorrum V har en bas med n element så har varje bas till V n element. Detta tal n kallas för dimensionen av V, $\dim V$.

Låt A vara en $m \times n$-matris. Rangen av A, $\mathrm{rank}A$, är dimensionen av $\mathrm{Col}\, A$. Det gäller att $n = \mathrm{rank}A + \dim \mathrm{Nul}\, A$.