Föreläsning 9, Linjär algebra AT.

Man säger att en matris A är diagonaliserbar om det finns diagonal matris D och inverterbar matris P sådana att $A = PDP^{-1}$.

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$, om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. I själva verket är

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \text{ och } D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

En $n \times n$-matris med n olika egenvärden är diagonaliserbar.

Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$.

Låt $T : V \longrightarrow W$ vara linjär avbildning och $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bas för V samt $F = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ bas för W. Då gäller att

$$[T(\mathbf{x})]_F = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_F & \ldots & [T(\mathbf{b}_n)]_F \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_B$$

I specialfallet $V = W$ och $B = F$ har vi

$$[T(\mathbf{x})]_B = [T]_B \, [\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_B & \ldots & [T(\mathbf{b}_n)]_B \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_B$$

Antag att $A = PDP^{-1}$ med D diagonal $n \times n$-matris. Om $P = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ så sätt $B = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. Då gäller att om $T(\mathbf{x}) = Ax$ så är D matrisen för T i basen B, d v s $[T]_B = D$.