Föreläsning 11, Linjär algebra AT.

Skalärprodukten mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n.$$

Egenskaper hos skalärprodukt:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ och $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ om och endast om $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Längden av en vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Om $c \in \mathbb{R}$ så är $\| c\mathbf{v} \| = |c| \, \| \mathbf{v} \|$.

Avståndet mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \| .$$

Man säger att två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala (vinkelräta) om

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Pythagoras sats: Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala om och endast om

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 .$$

Vinkeln mellan två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ ges av det unika tal θ som uppfyller

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \| \mathbf{v} \|} \text{ och } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Om W delrum till $\mathbb{R}^n$ så är ortogonala komplementet till W

$$W^\perp = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ för alla } \mathbf{w} \in W\}.$$

En ortogonal mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är en mängd $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sådan att vektorerna är parvis ortogonala, d v s $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ om $i \neq j$. Den är ortonormal om dessutom $\| \mathbf{v}_i \| = \sqrt{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} = 1$ för alla i.

En ortogonal mängd av vektorer linjärt oberoende.

Om $V = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ortogonal bas för W och $\mathbf{w} \in W$ så ges koefficienterna till $\mathbf{w}$ i basen V av

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_r\mathbf{v}_r \text{ med } c_i = \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}.$$

Ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{y}$ på en linje L med riktningsvektor $\mathbf{v}$ ges av

$$\operatorname{proj}_L \mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right) \mathbf{v}.$$