Föreläsning 12, Linjär algebra AT.

En $m \times n$-matris U har ortonormala kolumner om och endast om $U^T U = I$. Om $m = n$ så kallar man U för en ON-matris.

Om U är en $m \times n$-matris med ortonormala kolumner och $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så gäller

- $\| U\mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} \|$
- $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

Om W delrum till $\mathbb{R}^n$ och $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så gäller att

$$\mathbf{y} = \mathrm{proj}_W \mathbf{y} + z,$$

där $z \in W^{\perp}$. Om $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ är ortogonal bas för W så är

$$\mathrm{proj}_W \mathbf{y} = \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \right) \mathbf{u}_1 + \cdots + \left(\frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_r}{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r} \right) \mathbf{u}_r.$$

Låt $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ vara en bas för ett delrum W till $\mathbb{R}^n$. Vi får då en ortogonal bas $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ för W med Gram-Schmidts ortogonaliseringsalgoritm

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{b}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{b}_2 - \mathrm{proj}_{W_1} \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_2 - \left(\frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{b}_3 - \mathrm{proj}_{W_2} \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_3 - \left(\frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \right) \mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \right) \mathbf{v}_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

där $W_1 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1\}$, $W_2 = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ etc.

Minstakvadratlösning till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ges av en lösning till normalekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.