Föreläsning 13, Linjär algebra AT.

En kvadratisk matris A är symmetrisk om $A^T = A$.

Om A är en symmetrisk matris så är egenvektorer som hör till olika egenvärden ortogonala.

En matris A är ortogonalt diagonaliserbar om det finns diagonal matris D och ON-matris P sådana att

$$A = PDP^T.$$

Mängden av egenvärden till en matris kallas för matrisens spektrum.

Spektralsatsen för symmetriska matriser: En $n \times n$-matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk. Det betyder speciellt att:

- A har n reella egenvärden om man räknar multiplicitet (alltså inga ickereella egenvärden)
- Dimensionen av egenrummen är alltid samma som multipliciteten hos motsvarande egenvärde.
- Egenrummen är parvis ortogonala.

Spektraluppdelning av symmetrisk matris:

$$A = PDP^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T.$$

Matrisen $\mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T$ är matrisen för ortogonal projektion på $\mathbf{v}_j$.

En kvadratisk form i tre variabler $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ är ett uttryck på formen

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

På matrisform kan man skriva det som

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \text{ med } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

En kvadratisk form i n variabler definieras analogt. Eftersom A är symmetrisk så är den ortogonalt diagonaliserbar $A = PDP^T$ och om vi gör variabelbytet $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$ så får vi

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T PDP^T \mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D (P^T \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$