Linjära ekvationssystem:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

m ekv.

n obekanta

Tillåtna operationer (s.k. elementära!) är sådana som inte förändrar lösningsmängden.

- (Addition) addition av en ekv. $\cdot$ konstant till en annan ekvation
- (Platsbyte) platsbyte mellan två ekvationer
- (Skalning) en rad multipliceras med en konstant skild från noll.

Eliminationsmetoden: (Gausselimination)

1. Byt plats på ekvationerna så att koefficienten framför x_1 längst upp till vänster är skild från 0. (Vi kan anta att $a_{11} \neq 0$)
2. Addera $-\frac{a_{k1}}{a_{11}} \cdot$ ekvation 1 till ekv. k, $(k = 2, 3, \dots, m)$

Detta resulterar i att variabeln x_1 har eliminerats ur ekvationerna 2 t.o.m. m

Vi fortsätter nu med ekv. 2 t.o.m. m.
Om någon av de nya koefficienterna framför x_2 ej är noll (i någon av ekvationerna)

1') Så byter vi plats på denna och ekv. 2 (om nödvändigt!). Om alla koefficienterna framför x_2 är noll så går vi vidare till att betrakta koefficienterna framför x_3 och så vidare.

2') Enligt samma princip som i 2) ovan så kan vi nu eliminera x_2 (alt $x_3, \dots$) ur ekvationerna 3 t.o.m. m

Den här processen upprepas nu tills endast en ekvation återstår (vilket inträffar efter högst m-1 steg).

Vi erhåller på detta vis ett ekvationssystem på så kallad <u>trappstegsform</u> och som har samma lösningsmängd som det ursprungliga ekvationssystemet (*)
Dess form/utseende ges av följande

$$\begin{cases} \begin{array}{cccccccccc} \underline{*} & * & * & * & * & * & * & * & = & * \\ & \underline{*} & * & * & * & * & * & * & = & * \\ & & & \underline{*} & * & * & * & * & = & * \\ & & & & \underline{*} & * & * & * & = & * \\ & & & & & & \underline{*} & * & = & * \end{array} \end{cases}$$

1) Om någon ekvation är sådan att vänsterledet $= 0$ och högerledet $\neq 0$ så saknas lösningar till (*).

I annat fall så finns lösningar:

Om någon kolonn i trappstegsformen saknar markering så svarar denna mot en fri (oberoende) variabel vars värde kan väljas godtyckligt och

2) därmed finns oändligt många lösningar till (*). Annars har varje kolonn en markering och man inser (via bakåt-

3) substitution) att det finns precis en lösning till (*).

Sammanfattning: Ett linjärt ekvationssystem har (Sats 1.2 i Lay)

1) ingen lösning
2) oändligt många lösningar

eller 3) entydig lösning.

Ex

$$(*)\begin{cases} -3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 9x_4 = -7 \end{cases}$$

Multiplicera ekv. 2 med -1 och byt plats på ekv. 1 och 2

Det underlättar (på många sätt!) att uttrycka ekvationssystemet m.h.a. dess utökade matris:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (2)\;(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -6 & -6 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

kolonn svarande mot en fri variabel.

Ekvationssystemet som representeras av den sista matrisen är

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem är på trappstegsform och är ekvivalent med det ursprungliga (*)

Vi finner att

$x_4 = 0$,

$x_3 = t$ (fri variabel)

$x_2 = -3 - 2x_3 + 3x_4 = -3 - 2t$

$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 =$

$= 1 - 2(-3 - 2t) - t + 0$

$= 5 + 3t$

(Bakåt - substitution)

Dvs
$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3t \\ x_2 = -3 - 2t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ekv. syst. $(*)$ har ∞ många lösningar.)

Radreducering av en matris:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} (2) \; (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(addition)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (\tfrac{1}{2}) \end{matrix}$$

(platsbyte)

(skalning)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (3) \; (-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(addition)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-\tfrac{1}{5}) \\ \\ \end{matrix}$$

Trappstegsform!

Fortsatt radreducering ger den reducerade trappstegsformen

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (3) \\ \\ \end{matrix}$$

(addition)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(addition)

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reducerad Trappstegsform!

pivotkolonner

Markerade platser kallas pivotplatser

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

pivotkolonner

Elementen på pivotplatserna kallas för pivotelement

Tre presentationer av "samma" system

1)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \\ -3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

System med
3 ekvationer
4 obekanta

2)
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 4 \text{ matris}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^4} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3}$$

Matris-ekvation $A\vec{x} = \vec{b}$

3)
$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{linjärkombination av vektorer i } \mathbb{R}^3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorekvation!

Den utökade matrisen är

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -7 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sats 1.4

Antag att A är en $m\times n$-matris. Då är följande ekvivalent

(a) För varje $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbart

(b) Varje $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$ är en linjärkombination av kolonnerna i A

(c) Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ ($\text{span}\{\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$)

(d) A har ett pivotelement i varje rad

<u>Bevis:</u> Att (a), (b) och (c) är ekvivalenta följer direkt av definitionerna!

Vi visar sedan att (a) $\Leftrightarrow$ (d) genom att visa

1) (d) $\Rightarrow$ (a)

2) (d) falsk $\Rightarrow$ (a) falsk.

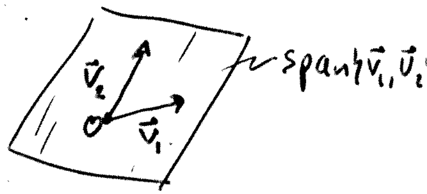
Definition: Spannet/Linjära höljet;

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\} =$$

$$= \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \ldots + c_p\vec{v}_p \; ; \; c_i \in \mathbb{R}\}$$

<u>alla</u> linjärkombinationer av $\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_p$.

Spannet av två vektorer i rummet ($\mathbb{R}^3$) ges av ett plan genom origo.



Om $A = [\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n]$, $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$, (m×n-matris)

så säger vi att <u>kolonnrummet</u> för matrisen A är spannet av A's kolonner, dvs

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

<u>Ex</u>: Avgör om $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \text{Col}(A)$ då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \vec{a}_3]$$

Dvs. finns tal x_1, x_2, x_3 s.a.

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (A\vec{x} = \vec{b} \;!)$$