

Om homogena ekvationssystem

Följande påståenden är ekvivalenta:

- (1) Matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ har bara den triviala lösningen.
- (2) Alla kolonner i A är pivotkolonner
- (3) Kolonnerna i A är linjärt oberoende

Det följer då att även nedanstående påståenden är ekvivalenta

- (4) Matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ har en icketrivial lösning
- (5) Matrisekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$ har minst en fri variabel.
- (6) Kolonnerna i A är linjärt beroende

Ex Avgör om $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende / beroende.

Ösn: Vi undersöker matrisen

$$A = [\vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ \vec{v}_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{①}} \sim \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats 1.7

Mängden av vektorer $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ är linjärt beroende om och endast om (minst) en av vektorena i S är en linjärkombination av de övriga.

Mer precist:

Om S är linjärt beroende och $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ så finns index j ($1 \leq j \leq p$) och $c_1, \dots, c_{j-1}$ s.a.
$$\vec{v}_j = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_{j-1} \vec{v}_{j-1}$$

Sats 1.8

Vektorena $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om $p > n$.

(Ty ekvationen $A\vec{x} = \vec{0}$, $A = [\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_p]_{n \times p}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$, har fler obekanta än ekvationer och har därför minst en frivariabel och därmed en icke-trivial lösning)