

Bevis för Cramers regel

Låt $\mathbf{x}$ vara den unika lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Matrisen $A_i(\mathbf{b})$ erhålls från A genom att kolonn i ersätts av $\mathbf{b}$.

På samma sätt bildas matrisen $I_i(\mathbf{x})$ genom att i enhetsmatrisen I_n ersätta kolonn i med $\mathbf{x}$.

Då är

$$A \cdot I_i(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & \cdots & A\mathbf{x} & \cdots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = A_i(\mathbf{b})$$

Alltså är

$$\det(A) \cdot \det(I_i(\mathbf{x})) = \det(A_i(\mathbf{b})).$$

Men om vi utvecklar $\det(I_i(\mathbf{x}))$ längs med i :e raden så finner vi att

$$\det(I_i(\mathbf{x})) = x_i \cdot \det(I_{n-1}) = x_i$$

vilket ger

$$x_i \det(A) = \det(A_i(\mathbf{b}))$$

och satsen är bevisad.