Dynamiska system, Linjär algebra AT.

Vi ska titta på en flyttningsmodell där man mätt hur befolkningen flyttar mellan de tre kategorierna storstad, tätort respektive på landsbygd.
Under ett år så flyttade 1% av de som som bodde i storstad till landsbygden och 3% till en tätort och resten bodde fortfarande i en storstad. För de som bodde i en tätort gällde det att 1% flyttade till vardera storstad och landsbygd samt att resterande 98% bodde kvar i en tätort. Slutligen för de på landsbygden så gällde att 0.5% flyttade till tätort, 1.5% flyttade till storstad och 98% bodde kvar.
Vi låter nu 3-vektorn $\mathbf{x}_k$ vara fördelningen efter k år med

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \text{antalet i storstad år } k \\ \text{antalet i tätort år } k \\ \text{antalet på landsbygd år } k \end{bmatrix}$$

Villkoren för omflyttningarna kan då skrivas på matrisform som

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n,$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 & 0.015 \\ 0.03 & 0.98 & 0.005 \\ 0.01 & 0.01 & 0.98 \end{bmatrix}$$

Om $\mathbf{x}_0$ är den ursprungliga befolkningsfördelningen så blir alltså

$$\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0.$$

Om man räknar ut egenvärdena för A så får man att de är 1, 0.97 respektive 0.95. Vi ser att det finns tre olika egenvärden och därmed 3 linjärt oberoende egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ som man lätt kan beräkna när man har egenvärdena. Nu kan vi uttrycka den ursprungliga vektorn $\mathbf{x}_0$ i basen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ genom

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3,$$

för några tal c_1, c_2 och c_3. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= A^n\mathbf{x}_0 = A^n(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) \\ &= c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^n\mathbf{v}_3 = c_1 \cdot 1^n\mathbf{v}_1 + c_2 \cdot 0.97^n\mathbf{v}_2 + c_3 \cdot 0.95^n\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

När n går mot oändligheten så går 0.97^n och 0.95^n båda mot 0 så $\mathbf{x}_n$ närmar sig $c_1\mathbf{v}_1$. Fördelningen kommer alltså att närma sig (en multipel av) egenvektorn $\mathbf{v}_1$. Om man räknar ut och normerar $\mathbf{v}_1$ så att summan av elementen är 1 så får man

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7/30 \\ 13/30 \\ 1/3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.2333 \\ 0.4333 \\ 0.3333 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder t ex att efter "lång tid" så kommer en tredjedel av befolkningen att bo på landsbygden. Observera att denna fördelning är oberoende av startvektorn.
Observera att det inte var en slump att 1 var ett egenvärde och att alla andra egenvärden var mindre än 1. Det följer av problemets natur.