Matrisekvationen $AX = B$

Då vi söker A^{-1} söker vi en kvadratisk matris X som uppfyller $AX = I$. Om kolonnerna i X är $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots\ ,\ \mathbf{x}_n$ skall alltså gälla att $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ för $i = 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n$. Vi kan lösa dessa ekvationer med totalmatriserna $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{e}_i \end{array}\right]$ en i taget eller alla samtidigt med $\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right]$.
Med samma resonemang kan vi lösa också andra matrisekvationer $AX = B$ med totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$. Om denna överförs till reducerad trappstegsform $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ så är $X = C$. Även om den reducerade trappstegsformen inte är av typen $\left[\begin{array}{c|c} I & C \end{array}\right]$ utan mer generellt $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$ kan man dra slutsatser om lösningen. Om alla pivotelement i $\left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$ finns i U så har ekvationen lösning, annars inte. Kolonner i U utan pivotelement ger upphov till parameterlösningar.
Exempel. Vi löser matrisekvationen $AX = B$ då

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{och } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen X måste vara en 3×2-matris. Vi bestämmer X med ekvationens totalmatris

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Denna är radekvivalent med

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} U & C \end{array}\right]$$

Den första kolonnen i C ger oss första kolonnen i X,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 9 - 3t \\ -4 + t \\ t \end{bmatrix}.$$

Den andra kolonnen i C ger oss andra kolonnen i X,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 - 3s \\ -1 + s \\ s \end{bmatrix}.$$

Notera att vi har olika parametrar, $x_{31} = t$ och $x_{32} = s$.
Ekvationens lösning är alltså

$$X = \begin{bmatrix} 9 - 3t & 4 - 3s \\ -4 + t & -1 + s \\ t & s \end{bmatrix}$$