MVE 275
Linjär Algebra AT
Ht 2012
Läsvecka 2

Omfattning

- Lay, kapitel 2.1-2.5, Matrisalgebra

Innehåll

- Matrisoperationer: addition av matriser, multiplikation med skalär, matrisinvers, transponering
- Räkneregler för matrisalgebra
- karakterisering av inverterbara matriser
- lite om blockmatriser
- LU-faktorisering, samband med lösning till linjärt ekvationssystem.

2.1 Matrisoperationer

Viktiga begrepp

- summa av matriser
- produkt av matriser
- transponat (transpose) av matris

Mål 2.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- addera matriser
- multiplicera matriser dels genom användning av definitionen, dels med $rad \bullet kolonn$-metoden.
- utnyttja räknereglerna i sats 2.1.2 vid beräkningar
- ge exempel som visar att
  - matrismultiplikationen inte är kommutativ.
  - annulleringslagen *inte* gäller, man kan alltså inte "förkorta":

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

  - en matrisprodukt AB kan vara en 0-matris trots att ingen faktor är 0-matris.
- transponera matriser och utnyttja räknereglerna i sats 2.1.3 vid beräkningar

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att $A(BC) = (AB)C.$

Matriskonventioner

- Positionen i rad *r* och kolonn *k* kallas position (*r*,*k*).
- Elementen i en matris *A* betecknas vanligtvis med a.
- Elementet på position (*r*,*k*) betecknas a_{rk} eller $(A)_{rk}$

- Kolonnerna i *A* betecknas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, eller $\mathrm{col}_1(A)$, $\mathrm{col}_2(A)$, ….
- Raderna i *A* betecknas $\mathrm{row}_1(A), \mathrm{row}_2(A)$,…..

En generell 4×5-matris A **kan skrivas på följande sätt:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{col}_1(A) & \mathrm{col}_2(A) & \mathrm{col}_3(A) & \mathrm{col}_4(A) & \mathrm{col}_5(A) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \mathrm{row}_2(A) \\ \mathrm{row}_3(A) \\ \mathrm{row}_4(A) \end{bmatrix}$$

Matrisoperationer

- **Addition**: Matriser av samma typ kan adderas. Additionen sker genom att elementen på samma positioner adderas. ”Positionsvis addition”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Multiplikation med skalär

- Alla matriselementen multipliceras med skalären:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikation

- Om antalet kolonner i *A* är samma som antalet rader i *B* kan produkten *AB* bildas.

  Alltså: om *A* är en $m \times n$-matris och *B* är en $n \times p$-matris, $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$ så är *AB* $m \times p$-matrisen

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 & \cdots & A\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$$

Skalärprodukt i $\mathbb{R}^n$

Om $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

så är *skalärprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Rad •kolonn - regeln för beräkning av matrisprodukt.

Elementet på position (*i,j*) i produkten *AB* är skalärprodukten av rad *i* ur *A* och kolonn *j* ur *B*

$$(AB)_{ij} = \mathrm{row}_i(A) \bullet \mathrm{col}_j(B)$$

Sats 2.1.2, räknelagar för matrisoperationer.

Antag att A, B och C är matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a.	$A(BC) = (AB)C$	(associativ lag för multiplikation)
b.	$A(B+C) = AB+AC$	(vänsterdistributiva lagen)
c.	$(B+C)A = BA+CA$	(högerdistributiva lagen)
d.	$r(AB) = (rA)B = A(rB)$	för alla skalära r
e.	$I_m A = A = AI_m$	(Identitetselement för multiplikation)

VARNING!

1. I allmänhet är $AB \neq BA$

2. Av $AB = AC$ kan man inte dra slutsatsen $B=C$

3. Av $AB = O$ kan man inte dra slutsatsen

   $A = O$ eller $B = O$

Definition s.114

- Med transponatet av en mxn-matris A menas nxm-matrisen A^T vars kolonnvektorer är radvektorerna i A:

$$\mathrm{col}_i(A^T) = \mathrm{row}_i(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 12 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exempel

Om $\boldsymbol{u}$ är en kolonnvektor är $\boldsymbol{u}^T$ motsvarande radvektor.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

skalärprodukten av två kolonnvektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ kan nu skrivas som en matrisprodukt

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

Sats 2.1.3 Räkneregler för transponering

Låt A och B vara matriser sådana att nedanstående operationer är möjliga. Då gäller:

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A+B)^T = A^T + B^T$

c. För alla skalära r är $(rA)^T = rA^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$ **Notera ordningen!**

2.2 Matrisinvers

Viktiga begrepp

- matrisinvers
- Elementära matriser

Mål 2.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- tillämpa sats 2.2.5 och 2.2.6 i problemlösning
- beräkna matrisinvers med hjälp av sats 2.2.4 och metoden i exempel 2.2.7.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara varför metoden att beräkna matrisinvers som beskrivs i exempel 2.2.7 ger det önskade resultatet.

Definition

- En $n \times n$-matris A kallas inverterbar om det finns en $n \times n$-matris C sådan att

$$CA = I \text{ och } AC = I$$

där $I = I_n$ är enhetsmatrisen (identity matrix) av typ $n \times n$.

- Matrisen C är i så fall entydigt bestämd och kallas inversen till A. Inversen betecknas A^{-1}.

Notera att

om A är inverterbar så gäller

1. Av $AB = AC$ kan man dra slutsatsen $B = C$.
2. Av $AB = O$ kan man dra slutsatsen $B = O$.

Sats 2.2.4

- Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Om $ad - bc \neq 0$ är A inverterbar med

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Om $ad - bc = 0$ är A inte inverterbar.

- Talet $ad - bc$ kallas *determinanten* till A.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad \det A = -11, \quad A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} = I_2$$

Sats 2.2.5

- Om A är en inverterbar $n \times n$–matris så gäller att för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^n$ har ekvationen $A\boldsymbol{x} = b$ entydig lösning $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

Definition s.122

Med en elementär matris menas en matris E som "utför **en** elementär radoperation".

Alltså om $A \sim A_1$ via en enda elementär radoperation och

$$EA = A_1$$

så kallas E elementär.

Det finns tre typer av elementära matriser

- Typ 1 som motsvarar att till en rad addera en multipel av en annan rad

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Om $A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$
- så är

$$E_1 A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) - 4\text{row}_1(A) \end{bmatrix}$$

Typ 2

- som motsvarar att två rader byter plats:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Om

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \mathrm{row}_2(A) \\ \mathrm{row}_3(A) \end{bmatrix}$$

- så är

$$E_2 A = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_2(A) \\ \mathrm{row}_1(A) \\ \mathrm{row}_3(A) \end{bmatrix}$$

Typ 3

- som motsvarar att en rad multipliceras med en skalär $c \neq 0$.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

- Om

$$A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$$

- så är

$$E_3 A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \text{row}_2(A) \\ c \cdot \text{row}_3(A) \end{bmatrix}$$

Elementära matrisers inverser

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Sats 2.2.7

En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om A är radekvivalent med I_n.

Varje följd av radoperationer som överför A till I_n kommer också att överföra I_n till A^{-1}.

Metod för beräkning av A^{-1}

- Överför matrisen $\left[\, A \mid I \,\right]$ till reducerad trappstegsform.
- Om denna är $\left[\, I \mid B \,\right]$ så är $B = A^{-1}$
- Om man inte får ett pivotelement i samtliga kolonner i A så är A inte inverterbar.

2.3 Karakterisering av inverterbara matriser

Viktiga begrepp

- Inga nya begrepp allt handlar om sats 2.3.8
  Invertible matrix theorem

Mål 2.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- tillämpa sats 2.3.8 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa sats 2.3.8.

Sats 2.3.8, om inverterbara matrisers egenskaper

Låt A vara en kvadratisk $n \times n$-matris .

Då är följande utsagor ekvivalenta.

(Alltså, för en given matris A är antingen alla sanna eller alla falska.)

a. A är en inverterbar matris.

b. A är radekvivalent med I_n

c. A har n pivotpositioner.

d. Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har endast den triviala lösningen, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

e. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.

f. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv.

Sats 2.3.8, om inverterbara matrisers egenskaper

g. Ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har minst en lösning för varje $\boldsymbol{b}$ i $\mathbb{R}^n$

h. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$

i. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv.

j. det finns en $n \times n$-matris C sådan att $CA = I$

k. det finns en $n \times n$-matris D sådan att $AD = I$.

l. A^T är en inverterbar matris.

Förenklande observation

- Om A och B är **kvadratiska** och $AB = I$ så kan vi dra slutsatsen att $B = A^{-1}$ och $A = B^{-1}$.
- Vi behöver alltså inte kontrollera att också $BA = I$

Definition: Inverterbar transformation

- En linjär transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en funktion $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla} \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbb{R}^n$$

- Funktionen S kallas då inversen till T och betecknas T^{-1}.
- En funktion är inverterbar om och endast om den är både injektiv och surjektiv. Den kallas då bijektiv.

Sats 2.3.9

- Låt T vara en linjär transformation och låt A vara standardmatrisen för T.

  Då är T inverterbar om och endast om A är en inverterbar matris.
- I så fall är den linjära avbildningen S som ges av $S(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{x}$ den inversa avbildningen till T.

Viktig observation

- Notera att om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ges av $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ så är T surjektiv om och endast om kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$ och

  injektiv om och endast om kolonnerna i A är linjärt oberoende.
- Om $n < m$ kan T inte vara surjektiv,
- om $n > m$ kan T inte vara injektiv.

2.4 Blockmatriser

Viktiga begrepp

- Blockmatris

Blockmatriser i Matlab

- Matriser kan skrivas in i Matlab som *block,* under förutsättning att blocken på samma "rad" innehåller samma antal rader.

  A = [zeros(4,3) ones(4);eye(5) ones(5,2)]

  är ett exempel på en 9×7-matris.
- Även tidigare definierade och namngivna matriser kan användas.

  B = [A;ones(1,7)] är en 10×7-matris.
- Om två matriser har blockindelningar som gör operationerna på blocken möjliga så kan matrisoperationerna utföras "blockvis".

2.5 Matrisfaktorisering

Viktiga begrepp

- LU-faktorisering

Mål 2.5

För betyget godkänd skall du kunna:

- bestämma LU-faktorisering av en matris där det inte krävs radbyte.

För högre betyg:

- inga ytterligare mål

LU-faktorisering

LU-faktorisering av en $m \times n$-matris A innebär att A skrivs som matrisprodukten

$$A = L \cdot U$$

U är den uppåt (Upper) triangulära $m \times n$-matrisen som erhålls vid eliminering.

L är den nedåt (Lower) triangulära $m \times m$-matrisen som motsvarar radoperationerna som ger tillbaka A.

Användning av LU-faktorisering

Faktoriseringen kan utnyttjas vid ekvationslösning genom:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow L \cdot U\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

Exempel

Lös ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 & -12 \end{bmatrix}^T$$

då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 0 & -5 & 3 \\ -9 & 5 & -5 & 12 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= L \cdot U$$