

MVE 275
Linjär Algebra AT
Ht 2012
Läsvecka 3

Omfattning och innehåll

- Lay, kapitel 3.1-3.3,
Determinanter:
beräkning, egenskaper och användning

3.1 Introduktion till determinanter

Viktiga begrepp

- determinant
- cofaktorutveckling

Mål 3.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- beräkna determinanten för en matris av godtycklig storlek med hjälp av sats 1

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga ytterligare mål i detta avsnitt

Definition

- Determinanten av en 2×2 -matris A definieras som

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinant av större storlek

- Determinanten av en $n \times n$ -matris definieras med hjälp av "utveckling efter rad 1"
- Om A är en $n \times n$ -matris så låter vi A_{ij} beteckna $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen som vi får om rad i och kolonn j stryks ur A .

Med cofaktor C_{ij} menas $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Definitionen av determinant kan då formuleras:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Determinantberäkning

- **Sats 3.1** Determinanter kan beräknas genom utveckling efter vilken rad eller kolonn som helst.

- Satsen säger att:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

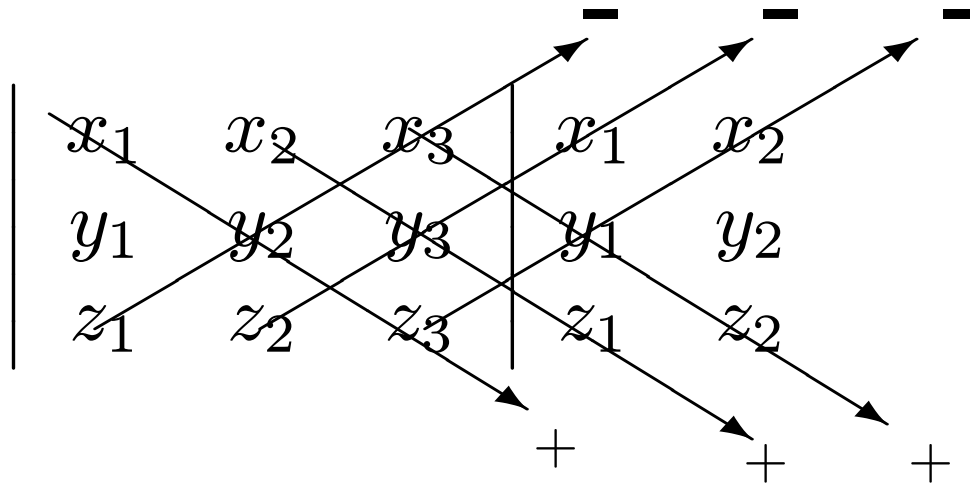
Detta kallas ***utveckling efter rad i*** .

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Detta kallas ***utveckling efter kolonn j*** .

Sarrus regel

- En 3×3 -determinant kan beräknas med **Sarrus regel**:



$$= x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3$$

OBSERVERA!

- Det finns ingen liknande beräkningsprocedur för större determinanter.
- För 4×4 -determinanter och större är beräkning genom utveckling efter rad eller kolonn, i kombination med satser i nästa avsnitt, det effektivaste beräkningssättet.

Sats 3.2

- Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & * \\ 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ 0 & \alpha_2 & * & * \\ 0 & 0 & \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & * & * \\ 0 & \alpha_3 & * \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4$$

3.2 Determinantens egenskaper

Viktiga begrepp

- radoperationer
- kolonnoperationer
- multiplikativa egenskapen

Mål 3.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- förenkla kalkylerna med hjälp av sats 3.2, 3.3 och 3.5
- utnyttja sats 3.4 för att avgöra om en matris är inverterbar
- tillämpa sats 3.6 i problemlösning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att en matris A är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$ (sats 3.4)

Sats 3.3

- Om B erhålls av A genom en elementär radoperation så gäller
 - a) Om en multipel av en rad i A adderas till en annan rad:

$$\det(B) = \det(A)$$

- b) Två rader i A byter plats:

$$\det(B) = -\det(A)$$

- c) En rad i A multipliceras med en skalär k

$$\det(B) = k \det(A)$$

Sats 3.3'

- Determinanten av en elementär matris ges av
 - a) De som hör till att en multipel av en rad i A adderas till en annan rad har determinant = 1
 - b) De som hör till ett platsbyte har determinant = -1
 - c) De som hör till multiplikation med k har determinant = k

Sats 3.3 kan alltså formuleras:

Om $B = EA$ där E är en elementär matris så är

$$\det(B) = \det(E) \cdot \det(A)$$

Sats 3.4

- Om A är en kvadratisk matris så gäller att
 A är inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- **Bevis:** Antag att A är radekvivalent med en trappstegsmatris U . Då finns elementära matriser $E_1, E_2, \dots, E_p$ där $A = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_p \cdot U$

Upprepad användning av sats 3.3' ger därför att

$$\det(U) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Att A är inverterbar innebär att U har pivotelement i varje rad och varje kolonn.

Detta är ekvivalent med att $\det(U) \neq 0$ (sats 3.2) och satsen följer.

Sats 3.5

- Om A är en kvadratisk matris så är

$$\det(A) = \det(A^T).$$

- OBS: Av detta följer att en determinant kan förenklas även med kolonnoperationer.

Sats 3.6

- Om A och B är $n \times n$ -matriser så är
 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$
- beviset bygger på upprepad användning av
sats 3.3' $\det(EA) = \det(E) \cdot \det(A)$
- **OBS!!** $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$
utom i undantagsfall.

3.3 Cramers regel, volym och linjära avbildningar

Viktiga begrepp

- "Cramers regel"
- Areaskala, Volymskala

Mål 3.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- utnyttja Cramers regel i problemlösning
- redogöra för determinantens tolkning som area- eller volymskala för en linjär avbildning

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa Cramers regel (sats 3.7)
- Bevisa sats 3.10

Cramers regel

Antag att A är en inverterbar $n \times n$ -matris.

Låt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ och låt $A_i(\mathbf{b})$ beteckna matrisen $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ där kolonn nr i ersatts av $\mathbf{b}$.

Då ges lösningen $\mathbf{x}$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av:

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Sats 3.9

Determinanten som area eller volym

- Om A är en 2×2 -matris är $|\det(A)|$ arean av parallelogrammen som spänns upp av A 's kolonner.
- Om A är en 3×3 -matris är $|\det(A)|$ volymen av parallelepipeden som spänns upp av A 's kolonner.

Sats 3.10

Determinanten som area- eller volymskala

- Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
- Låt S vara ett område i $\mathbb{R}^2$ och $T(S)$ bilden av detta område.
- Då gäller:
arean av $T(S) = |\det(A)| \cdot (\text{arean av } S)$
- Samma gäller om $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ och area ersätts av volym.