

MVE 275
 Linjär Algebra M/TD
 Ht 2012
 Läsvecka 4

Omfattning

- Lay, kapitel 2.8 - 2.9, 4.1 - 4.6, Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang. Allmänna linjära rum (vektorrum).

Innehåll

Underrum i $\mathbb{R}^n$, dimension och rang.
 Allmänna linjära rum och underrum i dessa
 Nollrum, kolonnrum och linjära avbildningar
 Basbegreppet, koordinatsystem.

2.8 Underrum i $\mathbb{R}^n$

Viktiga begrepp

- Underrum
- Kolonnrum
- Nollrum
- Bas

Mål 2.8 och 4.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- definiera begreppet **underrum** i $\mathbb{R}^n$ och avgöra om en viss mängd av vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet **bas** för ett underrum i $\mathbb{R}^n$.
- definiera begreppet **nollrum**, $\text{Nul}(A)$, till en matris A .
- avgöra om en given vektor tillhör $\text{Nul}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Nul}(A)$.
- definiera begreppet **kolonnrum**, $\text{Col}(A)$, till en matris A .
- avgöra om en given vektor tillhör $\text{Col}(A)$ samt bestämma en bas för $\text{Col}(A)$.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att nollrum och kolonnrum är underrum i lämpligt $\mathbb{R}^n$ och känna till deras tolkningar i samband med ekvationssystem och linjära transformationer.

Definition: Underrum i $\mathbb{R}^n$

- Ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är en mängd H av vektorer i $\mathbb{R}^n$ med följande tre egenskaper:
 - a. $\mathbf{0} \in H$ (nollvektorn ingår)
 - b. $\mathbf{u} \in H$ och $\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ (sluten under addition)
 - c. $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in H \Rightarrow c\mathbf{u} \in H$ (sluten under multiplikation med skalär)

Viktiga exempel

- Exempel 2.8.1 och 2.8.3
- Om $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ så är $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Definition

- **Kolonnrummet** $\text{Col}(A)$ till en $m \times n$ -matris A är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A .
Om $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ så är $\text{Col}(A) = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$
- ekvivalent formulerat:
- $\text{Col}(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ för någon vektor } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
Kolonnrummet $\text{Col}(A)$ **är ett underrum i** $\mathbb{R}^m$ (Sats 4.3)

Definition

- **Nollrummet**, $\text{Nul}(A)$, till en $m \times n$ -matris A , är mängden av alla lösningar till den homogena ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
 $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ och } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- **Sats 2.12/4.2 Nollrummet** till en $m \times n$ -matris **är ett underrum i** $\mathbb{R}^n$.
- Ekvivalent: Mängden av alla lösningar till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ med m ekvationer och n obekanta, är ett underrum i $\mathbb{R}^n$.

Olikheter mellan $\text{Nul}(A)$ och $\text{Col}(A)$ för en $m \times n$ -matris A

$\text{Nul}(A)$	$\text{Col}(A)$
1. $\text{Nul}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^n$	1. $\text{Col}(A)$ är ett underrum i $\mathbb{R}^m$
2. $\text{Nul}(A)$ är implicit definierat av ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$	2. $\text{Col}(A)$ är explicit definierat av kolonnvektorerna i A
3. Det tar tid att bestämma vektorer i $\text{Nul}(A)$	3. Det är lätt att hitta vektorer i $\text{Col}(A)$
4. Det finns inget uppenbart samband mellan $\text{Nul}(A)$ och elementen i A	4. Det finns ett uppenbart samband mellan $\text{Col}(A)$ och elementen i A

Olikheter mellan $\text{Nul}(A)$ och $\text{Col}(A)$ för en $m \times n$ -matris A

$\text{Nul}(A)$	$\text{Col}(A)$
5. En typisk vektor $\mathbf{v}$ i $\text{Nul}(A)$ är sådan att $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$	5. En typisk vektor $\mathbf{v}$ i $\text{Col}(A)$ är sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ är konsistent
6. Givet en vektor $\mathbf{v}$, så är det enkelt att avgöra om $\mathbf{v} \in \text{Nul}(A)$	6. Givet en vektor $\mathbf{v}$ så tar det oftast tid att avgöra om $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$
7. $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ endast har trivial lösning	7. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
8. $\text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$ om och endast om den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv	8. $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ om och endast om den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv

Definition: Bas för underrum

- En bas för ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ är en linjärt oberoende mängd av vektorer i H som spänner H

Sats 2.13

- Pivotkolonnerna i matrisen A bildar en bas för kolonnrummet till A .

4.1 Vektorrum och Underrum

Viktiga begrepp

- Vektorrum
- Underrum

Mål 4.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- inga nya godkänthmål i detta avsnitt

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- känna till de viktigaste exemplen på vektorrum och kunna ge belysande exempel.
- definiera begreppet underrum i ett vektorrum och kunna avgöra om en given delmängd av ett känt vektorrum är ett underrum.

Definition: Vektorrum

- Ett vektorrum är en icke-tom mängd V vars objekt kallas vektorer, försedd med två operationer: dels **addition** av vektorerna, dels **multiplikation** av en vektor **med en skalär**.
- Nedanstående räknelagar (axiom) måste gälla för alla vektorer u, v och w och för alla skalärer c och d .
- Summan av u och v : $u + v$ är ett objekt i V och
 - $u + v = v + u$
 - $(u + v) + w = u + (v + w)$
- Det finns en nollvektor 0 i V sådan att $u + 0 = u$
- Till varje u i V finns en vektor $-u$ i V så att $u + (-u) = 0$

Definition: Vektorrum

- Produkten av u med skalären c :
 cu är en vektor i V och
 - $c(u + v) = cu + cv$
 - $(c + d)u = cu + du$
 - $c(du) = (cd)u$
 - $1u = u$

Exempel på vektorrum

- $\mathbb{R}^n$
- Geometrisk vektorer
- Oändliga följder
- Polynom av grad högst n
- Reellvärda funktioner.

Definition: Underrum i V

- Ett underrum i ett vektorrum V är en delmängd H av vektorer i V med följande tre egenskaper:
 - $\mathbf{0} \in H$ (nollvektorn ingår)
 - $\mathbf{u} \in H$ och $\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ (sluten under addition)
 - $c \in \mathbb{R}$ och $\mathbf{u} \in H \Rightarrow c\mathbf{u} \in H$ (sluten under multiplikation med skalär)

Viktig observation

- Om H är ett underrum av vektorrummet V så är H också ett vektorrum.
- Viktiga resonemang blir enklare att föra med denna observation i tankarna.

Sats 4.1

- Om $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ tillhör ett vektorrum V så är $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ ett underrum i V .

Notera att detta är samma som Exempel 2.8.3

4.2 Nollrum, kolonnrum och linjära avbildningar

Viktiga begrepp

- Nollrum
- Kolonnrum
- Kärna och värdemängd

Mål 4.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga nya godkäntmål i detta avsnitt, se 2.8

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- Inga nya överbetygsmål i detta avsnitt, se 2.8

Definition

- En **linjär avbildning** T från ett vektorrum V till ett vektorrum W är en funktion med definitionsmängd V och målmängd W , alltså en regel som till varje vektor $\mathbf{x} \in V$ ordnar en entydigt bestämd vektor $T(\mathbf{x}) \in W$ sådan att
 - $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ för alla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
 - $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ för alla $\mathbf{u} \in V$ och alla skalärer c

Definition: Kärna och värdemängd

- **Kärnan** till en linjär avbildning $T: V \rightarrow W$ är mängden av alla $\mathbf{u} \in V$ sådana att $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Kärnan till T betecknas $\text{Ker}(T)$.
- **Värdemängden** till T är mängden av alla $\mathbf{w} \in W$ som är bild av någon vektor $\mathbf{x} \in V$.
Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ med standardmatris A , $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så gäller:
 - i. kärnan till T är samma som nollrummet till A och
 - ii. värdemängden är samma som kolonnrummet till A

Definition

(Jämför med definitionen i 1.9.)

- En avbildning $T: V \rightarrow W$ kallas **surjektiv** (eng. *onto*), om varje vektor $\mathbf{b} \in W$ är bild av minst en vektor $\mathbf{x} \in V$.
Värdemängden är i så fall hela W .
- Avbildningen $T: V \rightarrow W$ kallas **injektiv** eller **en-entydig** (eng. *one-to-one*), om varje vektor $\mathbf{b} \in W$ är bild av högst en vektor $\mathbf{x} \in V$.

4.3 Linjärt oberoende mängder, baser

Viktiga begrepp

- Linjärt oberoende, linjärt beroende
- Bas för underrum
- Bas för kolonnrum
- Bas för nollrum

Mål 4.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga nya godkänthmål i detta avsnitt, se 2.8

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppet **bas** för ett vektorrum

Definition

- En mängd av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ i H kallas **linjärt oberoende** om ekvationen

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$
 endast har trivial lösning, $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_p = 0$
- Vektorerna kallas **linjärt beroende** om ekvationen ovan har icke-trivial lösning.

Sats 4.4

- En mängd $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ bestående av två vektorer eller fler, och där $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ är linjärt beroende
om och endast om
någon av vektorerna $\mathbf{v}_j$ (med $j > 1$) är en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Definition: Bas

- Låt H vara ett underrum i V .
- En mängd av vektorer $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ i V kallas **en bas** för H om
 - $\mathcal{B}$ är en linjärt oberoende mängd
 - Underrummet som spänns av $\mathcal{B}$ är samma som H , alltså

$$H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$$

Sats 4.5

- Låt $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ vara en mängd av vektorer i V och låt

$$H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$$
 - Om en av vektorerna i S , t.ex. $\mathbf{v}_k$, är en linjärkombination av de övriga så kommer den mängd som formats från S med $\mathbf{v}_k$ bortplockad fortfarande att spänna upp H .
 - Om $H \neq \{\mathbf{0}\}$ så är någon delmängd av S en bas för H .

Bas för nollrum och kolonnrum

- Bas för nollrummet till en matris A
 - Metod: **Exempel 2.8.6 och 4.2.3**
 Lös ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$
 Identifiera vektorer som spänner upp nollrummet.
 Kontrollera att de är linjärt oberoende.
- Bas för kolonnrummet till A
 - Metod: **Sats 2.13 / 4.6:**
 Pivotkolonnerna i A bildar en bas för $\text{Col } A$

2.9 Dimension och rang

Viktiga begrepp

- Koordinatsystem
- Dimension
- Rang (rank)

Mål 2.9

För betyget godkänd skall du kunna:

- definiera begreppet **koordinater för en vektor relativt en bas** och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas för ett underrum i $\mathbb{R}^n$
 - definiera begreppet **dimension** av ett underrum i $\mathbb{R}^n$ och bestämma dimensionen för ett underrum.
 - definiera begreppet **rang** för en matris och bestämma rangen för en matris.
 - tillämpa **Rang-satsen** vid problemlösning.
 - Tillämpa **Satsen om inverterbara matriser** (*The invertible Matrix Theorem*) vid problemlösning
- För högre betyg skall du dessutom kunna:
- formulera och bevisa **Rang-satsen**.

4.4 Koordinatsystem

Viktiga begrepp

- Koordinater relativt en bas
- Koordinatbytesmatris

Mål 4.4

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga nya godkänthmål i detta avsnitt, se 2.9

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- definiera begreppet **koordinater för en vektor relativt en bas** och bestämma koordinaterna för en vektor relativt en given bas
- använda koordinatbytesmatriser vid problemlösning

4.5 Dimension för vektorrum

Viktiga begrepp

- Dimension

Mål 4.5

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga nya godkänthmål i detta avsnitt, se 2.9

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bevisa att varje mängd bestående av fler vektorer i ett vektorrum V än vad som finns i en bas för V måste vara linjärt beroende samt utnyttja detta för att bevisa att antalet vektorer i en bas för ett vektorrum är entydigt bestämt.
- definiera begreppet **dimension** för vektorrum.

4.6 Rang

Viktiga begrepp

- Rang

Mål 4.6

För betyget godkänd skall du kunna:

- Inga nya godkänthmål i detta avsnitt, se 2.9

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara varför de olika egenskaperna som nämns i **Satsen om inverterbara matriser** (*The invertible Matrix Theorem*) är ekvivalenta.

Sats 4.7 om entydigt bestämda koordinater

- Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ vara en bas för ett vektorrum V
- Då finns, till varje vektor $\mathbf{x} \in V$, en entydigt bestämd uppsättning skalärer, $c_1, \dots, c_p$ sådana att

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_p \mathbf{b}_p$$

Definition: Koordinater

- Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ är en bas för V och att $\mathbf{x} \in V$
Koordinaterna för $\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$ är skalärerna $c_1, \dots, c_p$ sådana att $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_p\mathbf{b}_p$
- Vektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$
 kallas **koordinatvektorn för $\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$** eller **$\mathcal{B}$ -koordinatvektorn för $\mathbf{x}$**

Koordinater i $\mathbb{R}^n$.

- Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ och att kolonnvektorn $\mathbf{x}$ har koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ relativt basen $\mathcal{B}$
 Låt $P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$
- Då är vektorekvationen $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \dots + c_n\mathbf{b}_n$ ekvivalent med $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$
 Matrisen $P_{\mathcal{B}}$ kallas koordinatbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen.

Sats 4.8

Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V .
 Då är koordinatavbildningen från V till $\mathbb{R}^n$, som ges av $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$
 en bijektiv linjär avbildning.
 (bijektiv = injektiv och surjektiv = one-to-one och onto)
 En bijektiv linjär avbildning kallas en **isomorfism**

Sats 4.9

Om ett vektorrum V har en bas

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\},$$

så måste

- varje mängd bestående av fler än n vektorer i V vara linjärt beroende.

Sats 4.10

- Om ett vektorrum V har en bas, som består av p vektorer, så består alla baser för V av precis p vektorer.
- Talet p kallas vektorrummets **dimension**.
- Dimensionen av vektorrummet $\{\mathbf{0}\}$, som alltså endast innehåller nollvektorn i $\mathbb{R}^n$ är 0.

Definition: Dimension

- Om V spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V **ändligtdimensionellt**.
- V 's **dimension**, $\dim V$, är antalet vektorer i en bas för V .
- Om V endast innehåller nollvektorn $V = \{\mathbf{0}\}$ så är $\dim V = 0$.
- Om V inte spänns upp av en ändlig mängd av vektorer, så kallas V **oändligtdimensionellt**.

Sats 4.11

- Låt H vara ett underrum i ett ändligtdimensionellt vektorrum V .
- Då kan varje linjärt oberoende mängd av vektorer i H som inte redan spänner upp H utökas till en bas för H .
- Vidare är H också ändligtdimensionellt och $\dim H + \dim V = \dim V$

Sats 4.12: Bassatsen

- Låt V vara ett p -dimensionellt vektorrum, $p \geq 1$.
- Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för V .
- Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp V är också automatiskt en bas för V .

Sats 2.15: Bassatsen

- Låt H vara ett p -dimensionellt (med $p \geq 1$) underrum i $\mathbb{R}^n$.
- Då är varje linjärt oberoende mängd bestående av exakt p vektorer automatiskt en bas för H .
- Varje mängd bestående av exakt p vektorer som spänner upp H är också automatiskt en bas för H .

Viktiga observationer

$\dim \text{Nul } A =$ antalet fria variabler i ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\dim \text{Col } A =$ antalet pivotkolonner i A .

Om antalet kolonner är n så följer alltså att

$$\dim \text{Col } A + \dim \text{Nul } A = n$$

Definition

- **Rangen** av en matris, $\text{Rank } A$ är kolonnrummets dimension.
- **Sats 2.14, och 4.14 Rang-satsen, Dimensionssatsen**
- Om matrisen A har n kolonner (observera att A inte behöver vara kvadratisk) så gäller $\text{Rank } A + \dim \text{Nul } A = n$

4.6: Radrummet

- **Radrummet**, $\text{Row}(A)$, till en matris A är mängden av alla linjärkombinationer av radvektorer i A
- **Sats 4.13:** Elementära radoperationer förändrar inte radrummet.

Alltså om A och B är radekvivalenta, $A \sim B$, så är $\text{Row } A = \text{Row } B$

Bas för radrummet till A

Om $A \sim U$ där U är en trappstegsmatris så är pivotraderna i U en bas för $\text{Row}(A)$.

Om radreduktionen inte krävt omordning av raderna kan man ta pivotraderna i A som bas.

Sats 4.14, Rang-satsen, Dimensionssatsen

- Dimensionen för $\text{Row}(A)$ och $\text{Col}(A)$ är samma som antalet pivotkolonner i A .
- **Definition:** Denna dimension kallas **rangen** för A , $\text{Rank}(A)$.
- Följande samband gäller mellan matrisens **rang**, nollrummets dimension och antalet kolonner i matrisen:

$$\text{Rank } A + \dim \text{Nul } A = n$$

Satsen om inverterbara matrisers egenskaper

Låt A vara en kvadratisk $n \times n$ -matris.

Då är följande utsagor ekvivalenta.

- A är inverterbar
- Kolonnerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^n$
- $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$
- $\dim \text{Col } A = n$
- $\text{Rank } A = n$
- $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$
- $\dim \text{Nul } A = 0$