

MVE 275
 Linjär Algebra AT
 Ht 2012
 Läsvecka 5

Omfattning

- Lay, kapitel 5.1-5.4, 5.7 Egenvärden och egenvektorer
- Kapitel 4.7 Basbyten

Innehåll

- Egenvärden och egenvektorer
- Karakteristiska ekvationen för en matris
- Diagonalisering
- Tillämpning på system av differentialekvationer
- Basbyte i vektorrum
- Egenvärden och linjära avbildningar.

5.1 Egenvärden och egenvektorer

5.2 Karakteristisk ekvation

Viktiga begrepp

- Egenvektor (eigenvector)
- Egenvärde (eigenvalue)
- Karakteristisk ekvation
- Similära, likvärdiga, matriser

Mål 5.1

För betyget godkänd skall du kunna:

- definiera begreppen **egenvektor** och **egenvärde**

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- inga nya överbetygsmål i detta avsnitt

Mål 5.2

För betyget godkänd skall du kunna:

- förklara varför lösningarna till den karakteristiska ekvationen till en matris är matrisens egenvärden.
- bestämma egenvärden och egenvektorer till en matris

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- inga nya överbetygsmål i detta avsnitt

Definition: egenvektor och egenvärde

- En **egenvektor** till en $n \times n$ -matris A är en vektor $\mathbf{x} \neq 0$ sådan att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ för någon skalär λ .
- En skalär λ kallas ett **egenvärde** till A om det finns en **icketrivial lösning** $\mathbf{x}$ till ekvationen $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- Varje sådan **icke-trivial** lösning kallas en **egenvektor som hör till egenvärdet** λ .
- Mängden av **alla** vektorer $\mathbf{x}$ som uppfyller $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, alltså även nollvektorn, kallas **egenrummet** som hör till egenvärdet λ .
- Egenrummet är **nollrummet** $\text{Nul}(A - \lambda I)$.

Egenvärden och linjära avbildningar

- Om A är standardmatrisen för en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, som alltså ges av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ så är en egenvektor en rikting där T endast innebär en "skalning" med faktorn λ .

Karakteristiska ekvationen

- En skalär λ är ett egenvärde till en $n \times n$ -matris A om och endast om λ är rot till matrisens **karakteristiska ekvation** $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Man säger att egenvärdet λ har **multiplicitet** m om λ har denna multiplicitet som rot till karakteristiska ekvationen.

Sats 5.1

- Egenvärdena till en triangulär matris är elementen på huvuddiagonalen.

Sats 5.2

- Om $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ är egenvektorer till **olika** egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ så är $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ en **linjärt oberoende mängd av vektorer**.

Definition: diagonaliserbar

- En $n \times n$ -matris A kallas **diagonaliserbar** om $A = PDP^{-1}$ för någon inverterbar matris P och någon diagonalmatris D .
- Två $n \times n$ -matriser A och B kallas **similära, likvärdiga** om $A = PBP^{-1}$ för någon inverterbar matris P .
- Matrisen A är **diagonaliserbar om** A är **similär** med en diagonalmatris.

Sats 5.4

Två Similära matriser har samma egenvärden.

Bevis: Antag att A och B är similära och att $A = PBP^{-1}$.
Satsen följer om vi visar att de karakteristiska ekvationerna för A respektive B har samma lösningar.

Men

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det(PBP^{-1} - \lambda PP^{-1}) = \det((PB - \lambda PI)P^{-1}) \\ &= \det(P(B - \lambda I)P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(B - \lambda I) \cdot \det(P^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I) \quad (\text{eftersom } \det(P^{-1}) = 1/\det(P)).\end{aligned}$$

Dvs

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(B - \lambda I) = 0$$

Mål 5.3

För betyget godkänd skall du kunna:

- bestämma egenvektorsbas till en matris
- **diagonalisera** en matris
- beräkna potenser av en matris med hjälp av diagonalisering

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- inga nya överbetygs mål i detta avsnitt

5.3 Diagonalisering

Viktiga begrepp

- Diagonalisering, diagonaliserbar matris
- Egenvektorsbas, bas bestående av egenvektorer
- Matrispotens

Sats 5.5, Diagonaliseringssatsen

- En $n \times n$ -matris A är **diagonaliserbar** om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer.

Beviskiss: Utnyttja att med

$$P = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \text{ och } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så är

$$AP = [A\mathbf{v}_1 \cdots A\mathbf{v}_n] \text{ och } PD = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \cdots \lambda_n\mathbf{v}_n]$$

Satsen följer nu av att

$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \text{ och } P\text{'s kolonner är linjärt oberoende}$$

Sats 5.5, Diagonaliseringssatsen

- **Observera:** A är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas för $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A

En sådan bas kallas för **egenvektorsbas** till A

Sats 5.6

- Om $n \times n$ -matrisen A har n olika egenvärden så är A diagonaliserbar.

Bevis: Sats 5.2 + Sats 5.5

Sats 5.7

- Låt A vara en $n \times n$ -matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.

(Notera att p kan vara mindre än n .)

Då gäller följande:

- För alla egenvärden är egenrummets dimension högst lika med egenvärdets multiplicitet.
- A är diagonaliserbar om och endast om det för alla egenvärden gäller att egenrummets dimension är lika med egenvärdets multiplicitet.
- Genom att välja en bas B_k för varje egenrum får man sammantaget en egenvektorsbas till A .

Mål 5.7

För betyget godkänd skall du kunna:

- utnyttja matrisdiagonalisering för att lösa system av linjära differentialekvationer.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- förklara, med hjälp av variabelbyte, hur diagonalisering av matris leder till allmänna lösningen till ett system av linjära differentialekvationer

5.7 Tillämpning på differentialekvationer

Viktiga begrepp

- Kopplade – okopplade ekvationer

System av linjära differentialekvationer

- Ett system av **linjära differentialekvationer** kan skrivas på tre sätt:

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + a_{13}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) \end{cases}$$

- eller på matrisform:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

- Komprimerat:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

Notera att det i vänsterled står derivator!

Lösningsmetod

- Antag matrisen A är diagonaliserbar, $A = PDP^{-1}$ där kolonnerna i $P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ bildar en egenvektorsbas och där

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

- Vi har då att $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ kan skrivas $\mathbf{x}'(t) = PDP^{-1}\mathbf{x}(t)$
- Gör **substitutionen** $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ (dvs $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$)

- På vektorform: $\mathbf{x}(t) = y_1(t)\mathbf{v}_1 + y_2(t)\mathbf{v}_2 + y_3(t)\mathbf{v}_3$
- Eftersom matrisen P inte innehåller någon variabel t är $\mathbf{x}'(t) = y_1'(t)\mathbf{v}_1 + y_2'(t)\mathbf{v}_2 + y_3'(t)\mathbf{v}_3 = P\mathbf{y}'(t)$
- Substitutionen ger alltså $P\mathbf{y}'(t) = PD\mathbf{y}(t)$

Lösningsmetod forts.

- Eftersom P är inverterbar har vi då att $\mathbf{y}'(t) = D\mathbf{y}(t)$ eller utskrivet som system

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ y_3'(t) = \lambda_3 y_3(t) \end{cases}$$

- Detta **okopplade** system löser man som vanligt och får

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \\ y_3(t) = C_3 e^{\lambda_3 t} \end{cases}$$

Lösningsmetod forts.

- Återsubstitution, med $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ ger oss nu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= y_1(t)\mathbf{v}_1 + y_2(t)\mathbf{v}_2 + y_3(t)\mathbf{v}_3 \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3\end{aligned}$$
- Konstanterna C_1, C_2, C_3 ges av begynnelsevärdet $\mathbf{x}(0)$
- Insättning av $t = 0$ i lösningsuttrycket ger ekvationen

$$\mathbf{x}(0) = P \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad (\text{med utökad matris } [P \mid \mathbf{x}(0)])$$
- detta löses som vanligt, de erhållna värdena på C_1, C_2, C_3 sätts in i

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \mathbf{v}_3$$

4.7 Basbyte

Viktiga begrepp

- Koordinatbytesmatris**

Mål 4.7

För betyget godkänd skall du kunna:

- växla mellan olika baser för $\mathbb{R}^n$
- Sats 4.7.15 är central.

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- växla mellan olika baser för andra vektorrum än $\mathbb{R}^n$

Definition: Koordinater

- Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V och att $\mathbf{x} \in V$

Koordinaterna för $\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$ är skalärerna $c_1, \dots, c_n$ sådana att $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$

$$\text{Vektorn } [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

kallas **koordinatvektorn för $\mathbf{x}$ relativt basen $\mathcal{B}$** eller

$\mathcal{B}$ -koordinatvektorn för $\mathbf{x}$

Koordinater i $\mathbb{R}^n$.

- Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ och att kolonnvektorn $\mathbf{x}$ har koordinatvektorn

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \text{ relativt basen } \mathcal{B}$$

Låt $P_{\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$

- Då är vektorekvationen $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$ ekvivalent med $\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$

Matrisen $P_{\mathcal{B}}$ kallas **koordinatbytesmatrisen från $\mathcal{B}$ till standardbasen**.

Sats 4.7.15

- Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ vara två baser för vektorrummet V .
- Då finns en entydigt bestämd $n \times n$ -matris ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$ sådan att $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$
- Kolonnerna i ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}}$ är koordinatvektorerna för vektorerna i basen $\mathcal{B}$ relativt basen $\mathcal{C}$.
- Alltså ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}} = [\ [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$

Basbyte i $\mathbb{R}^n$

- Låt $\mathcal{E}$ beteckna standardbasen för $\mathbb{R}^n$ och låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ vara en annan bas för $\mathbb{R}^n$.
- Om $\mathbf{x}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så är $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ och

$${}_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$$

Basbyte i $\mathbb{R}^n$

- Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ vara två baser för $\mathbb{R}^n$.
- Låt $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ och $P_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$
- Då är ${}_{\mathcal{C}}P_{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{C}})^{-1} P_{\mathcal{B}}$

5.4 Egenvektorer och linjära transformationer

Viktiga begrepp

- Matrisen till en linjär transformation, avbildningsmatris

Mål 5.4

För betyget godkänd skall du kunna:

- inga nya godkänthåll i detta avsnitt

För högre betyg skall du dessutom kunna:

- bestämma och använda avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ till en linjär avbildning T från V till V , relativt en given bas $\mathcal{B}$ för V .
- växla mellan olika baser i samband med linjära avbildningar
- tillämpa diagonalisering i samband med linjära avbildningar.

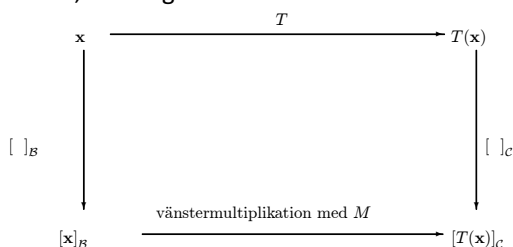
Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $T: V \rightarrow W$.

- Antag att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V .
- Antag att $\mathcal{C}$ är en bas för vektorrummet W och att $T: V \rightarrow W$ är en linjär avbildning.
- Bilda matrisen $M = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$
- Då är $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$
- Matrisen M kallas **avbildningsmatrisen för T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$**

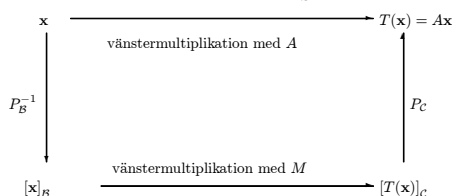
OBSERVERA

- Varje avbildning kan representeras av oändligt många matriser och varje matris kan representera oändligt många avbildningar.
- Detta motiverar att man **aldrig** har samma beteckning på avbildning och matris.

- Ett sätt att åskådliggöra likheten $[T(\mathbf{x})]_C = M[\mathbf{x}]_B$ är med ett så kallat **kommutativt** diagram.
- I diagrammet ser vi två sätt att beräkna bilden av $\mathbf{x}$, dessa ger samma resultat.



- Antag att $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ges av matrisen A , $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, och att M är avbildningsmatrisen för T relativt en bas B för $\mathbb{R}^n$ och en bas C för $\mathbb{R}^m$.
- Då är $\mathbf{x} = P_B[\mathbf{x}]_B$ vilket ger att koordinatavbildningen $[]_B$ ges av vänstermultiplikation med P_B^{-1} .



Ovanstående diagram är således kommutativt och vi har att

$$A = P_C M P_B^{-1}.$$

Kommentar

- Om $V = \mathbb{R}^n$ och $W = \mathbb{R}^m$ med standardbaser i båda fallen och $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning så är M den vanliga avbildningsmatrisen, standardmatrisen, från kapitel 1.9.
- Alltså $M = A$ där

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Kommentar

Givet en linjär avbildning $T: V \rightarrow W$ så ser vi att avbildningsmatrisen beror av vilka baser vi arbetar med. Detta ger upphov till följande två fundamentala frågor:

Fråga 1

Antag avbildningen är enkel att förstå, geometriskt, verbalt eller på annat sätt.

Då kan vi ofta ge en matematisk beskrivning av T i termer av baser som är speciellt lämpade för T .

Dessa baser är kanske inte naturliga för V eller W och passar kanske inte för hela problemet vi arbetar med. Hur hittar vi avbildningsmatrisen för T relativt de naturliga baserna?

Fråga 2

Antag vi känner avbildningsmatrisen för T relativt baser för V och W

Hur skall vi hitta baser som är speciellt lämpade för T så att vi kan få en annan förståelse för T ?

Avbildningsmatrisen till en linjär avbildning $T : V \rightarrow V$.

- Antag att $T : V \rightarrow V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för vektorrummet V .
- Bilda matrisen $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} & \dots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$
- Vi har då att $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$
- I detta fall betecknas alltså avbildningsmatrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ istället för M .

Basbyte och linjära avbildningar

- Antag att $T : V \rightarrow V$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ är två baser för vektorrummet V
- Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_{\mathcal{B}}$ och $[T]_{\mathcal{C}}$
- Sambandet mellan dessa ges av

$$[T]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{C}}^{-1} [T]_{\mathcal{C}} P_{\mathcal{B}}$$

Basbyte och linjära avbildningar

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

- Antag att $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en linjär avbildning och att $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.
- Vi har då två avbildningsmatriser, $[T]_{\mathcal{B}}$ och standardmatrisen A .
- Sambandet mellan dessa ges av

$$A = P_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Kommentar

- Detta är endast ett specialfall av sambandet $A = P_{\mathcal{C}} M P_{\mathcal{B}}^{-1}$ som vi funnit tidigare.

Similära matriser och linjära avbildningar

- Två matriser A och M är similära om det finns en inverterbar matris P så att $A = P M P^{-1}$.
- Två matriser är similära, likvärdiga, om och endast om de är avbildningsmatriser för samma linjära avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ men relativt olika baser.
- Matrisen M är då avbildningsmatris för den avbildning som ges av A men relativt den bas som ges av kolonnerna i P

Sats 5.4.8 Diagonalmatrisrepresentation av linjär avbildning

- Antag $A = P D P^{-1}$, där D är en $n \times n$ diagonalmatris.
- Låt $\mathcal{B}$ vara basen för $\mathbb{R}^n$ som ges av kolonnerna i P .
- Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen som ges av $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$
- Då är D avbildningsmatrisen för T relativt basen $\mathcal{B}$.