

Lag: 1.4.40 + 42:

40. Avgör om kolonnerna i $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5]$ spänner upp $\mathbb{R}^5$, dvs är $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^5$?

42. Bestäm vilka kolonner i A som egentligen inte behövs för att spänna upp $\mathbb{R}^5$.

här är

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ -7 & -8 & 5 & 6 & -9 \\ 11 & 7 & -7 & -9 & -6 \\ -3 & 4 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \textcircled{-1} \\ \swarrow \\ \nwarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & -1 & -2 & -19 \\ -3 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \nwarrow \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 8 & 11 & -6 & -7 & 13 \\ 3 & -4 & -1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcircled{8} \textcircled{-3} \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \downarrow \frac{1}{6} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -13 & 2 & 1 & -19 \\ 0 & -13 & 2 & 1 & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \nwarrow \\ \nwarrow \\ \nwarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -13 & 2 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \nwarrow \\ \nwarrow \\ \downarrow \frac{1}{12} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -13 & 2 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ ↑ ↑ ↑
pivotkolonner

dvs

Varje rad i A har ett pivotelement!

$\Rightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ har en lös. för varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^5$

Dvs

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5\} = \mathbb{R}^5$$

Tar vi bort kolonn 3 ($\vec{a}_3$) i A så kommer matrisen $A' = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5]$

fortfarande ha ett pivotelement i varje rad!

De radoperationer som behövs för att reducera

A till trappstegsform $U = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5]$

är precis de som reducerar A' till

trappstegsform $U' = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4, \vec{u}_5]$

Därmed följer att

$$\text{Col}(A) = \text{Col}(A') = \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4, \vec{a}_5\}$$

(Vi kan "slänga" bort icke-pivotkolonner!)

Generellt gäller

$$\text{Col}(A) = \text{span}\{\text{alle pivotkolonner i } A\}$$

och

Pivotkolonnerna i en matris A är linjärt oberoende.