

En avbildning (funktion) T är linjär om

$$(i) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$(ii) \quad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

för alla vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och alla skalärer c .

Ex (Matrisavbildningar!)

Om A är en $m \times n$ -matris så är avbildningen

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}$$

en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$

Med $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$, $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ så

är ju $T(\vec{x}) = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$

t. ex.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^3$ $\in \mathbb{R}^2$

Dvs

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Sats 1.10 Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns en entydig bestämd matris A sådan att

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}, \text{ för alla } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Dessutom är

$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$$

där

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

A kallas för standardmatrisen

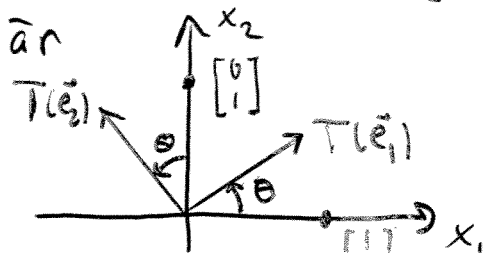
Ex (Rotation vinkeln θ motsols)

Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som roterar en vektor $\vec{u}$ i $\mathbb{R}^2$ vinkeln θ motsols!

Då är $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$

och standardmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



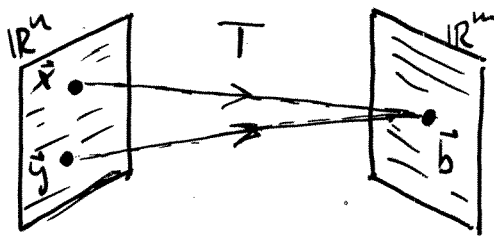
Värdemängden för en avbildning
 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är

$$V(T) = \{T(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

För en matrisavbildning, <sup>↑ definitions-
mängden!</sup>
 $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, gäller att

$$V(T) = \text{col}(A) = \{x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n; x_i \in \mathbb{R}\}$$

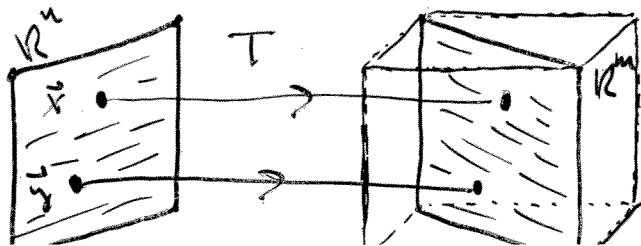
Definition: Avbildningen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 är surjektiv (på $\mathbb{R}^m$) om varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 är bilden av åtminstone ett $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
 ($V(T) = \mathbb{R}^m$!)



$$T(\vec{x}) = T(\vec{y}) = \vec{b}$$

ok.

Definition: Avbildningen $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 är injektiv (1-1, en-entydig) om
 varje $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ är bild av högst ett $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$



$$\vec{x} \neq \vec{y} \Rightarrow T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$$

Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning

Sats 1.11:

T är injektiv om och endast om
 ekvationen $T(\vec{x}) = \vec{0}$

bara har den triviala lösningen.

Sats 1.12

Om A är standardmatrisen för T
 så gäller att

- (a) T är surjektiv om och endast om
 kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^m$
- (b) T är injektiv om och endast om
 kolonnerna i A är linjärt oberoende

Beweis: (a) $V(T) = \text{col}(A)$ och $\text{col}(A) = \mathbb{R}^m$
 precis då kolonnerna i A spänner $\mathbb{R}^m$

- (b) T är 1-1 precis då ekvationen
 $A\vec{x} = \vec{0}$ endast har lösningen $\vec{x} = \vec{0}$
 vilket är detsamma som att säga
 att kolonnerna i A är linjärt oberoende