Matrismultiplikation

Om A är av typ $m \times p$ $\left(\begin{smallmatrix} m & \text{rader} \\ p & \text{kolonner}\end{smallmatrix}\right)$

och $B = [\vec b_1\ \vec b_2\ \dots \vec b_n]$ är av typ $p \times n$

så definierar vi produkten

def $\quad AB = [A\vec b_1\ A\vec b_2\ \cdots\ A\vec b_n]$

Notera att antalet kolonner i AB är n och att antalet rader i AB är m (eftersom varje kolonn är en linjärkombination av kolonnerna i A som har m rader)

Alltså har AB typen $m \times n$

Notera också att om $\vec x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ så är

$$B\vec x = x_1\vec b_1 + x_2\vec b_2 + \dots + x_n\vec b_n$$

och

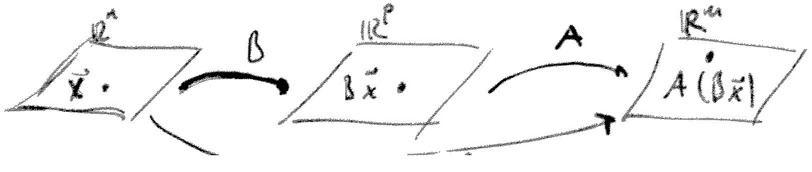
$$A(B\vec x) = x_1 A\vec b_1 + x_2 A\vec b_2 + \dots + x_n A\vec b_n \quad \begin{pmatrix}\text{Sats} \\ 1.5\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{[A\vec b_1\ \cdots\ A\vec b_n]}_{=AB}\vec x$$

Dvs

$$\underline{(AB)\vec x = A(B\vec x)} \quad (\text{för alla } \vec x)$$

viktig egenskap



Exempel:

$$S(\vec x) = \overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}^{=B} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{=\vec x}, \quad B \text{ av typ } 2\times 3$$

$$T(\vec y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{=\vec y}, \quad A \text{ av typ } 3\times 2$$

$$T \circ S(\vec x) = T(S(x)) = A(B\vec x) = \underbrace{(AB)}_{\text{av typ } 3\times 3}\vec x$$

$$AB = \left[A\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\ A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right]$$

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 3 - 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 2 - 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{=B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{=C}$$

(rad-kolonn metoden för beräkning av matrisprodukt)

Inversen till en matris

Def A kvadratisk $n \times n$-matris
C säges vara invers till A om
$$\boxed{AC = CA = I_n}$$
Vi skriver $C = A^{-1}$.

Obs Inversen till en matris är entydig
(dvs det finns högst en!)

Sats 2.4
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$
Om $\underline{ad-bc \neq 0}$

Sats 2.5 Om A^{-1} existerar så gäller att ekvationen $A\vec{x} = \vec{b}$ har den entydiga lösningen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Sats 2.6

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

A & B är inverterbara

Generalisering av (b):
En produkt av inverterbara matriser är inverterbar
Om t. ex A, B, C, D är inverterbara så gäller
$$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Sats 2.7:

A inverterbar $\iff$ $A \sim I_n$

och de radoperationer som reducerar A till I_n reducerar också $\cancel{A}$ I_n till A^{-1}.
Dvs
$$[A \ I_n] \sim \ldots \sim [I_n \ A^{-1}]$$

Bevis $\Leftarrow$) $A \sim I_n \implies$ Det finns elementära matriser $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sådana att
$$A \sim E_1A \sim E_2E_1A \sim \ldots \sim \underline{E_p \cdots E_2E_1A = I_n}$$
Produkten $C = E_p \cdots E_2E_1$ är inverterbar eftersom elementära matriser är inverterbara
Dvs
$$CA = I \text{ ger } A = C^{-1}I = C^{-1}$$
Vilket visar att A är inverterbar (eftersom den är invers till en inverterbar matris,
$A^{-1} = (C^{-1})^{-1} = C$)

Dessutom är
$$\underline{A^{-1} = C = E_p \cdots E_2E_1I_n}$$

Dvs. samma radoperationer som reducerade A till I_n reducerar I_n till A^{-1}.

Elementära radoperationer, 3 st!

1) (Addition)
En rad · konstant adderas till en annan rad.

2) (Radbyte)
Två rader byter plats

3) (Skalning)
En rad multipliceras med en skalär $\neq 0$

Definition av elementär matris:
En elementär matris är en matris som erhålls genom att utföra en (1 st.) elementär radoperation på en identitetsmatris.

Om E är en $m \times m$ elementär matris och A en $m \times n$ matris så är EA den $m \times n$ matris man får genom att på A utföra den radoperation som utfördes på identitetsmatrisen I_m för att ge E

$$A \sim EA$$

$$I_m \sim E$$

Eftersom elementära radoperationer är reversibla så är elementära matriser inverterbara!

Ex

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{7}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

Den radoperation som behövs för att återföra E_1 till I_3 är addera $-7 \cdot$ rad1 i E_1 till rad 3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-7}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 \quad \text{(och så elementär}$$

$$E_2 = E_1^{-1} \quad ! \quad \text{ty}$$

$$E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7+0+7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

&

$$E_1 E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7-7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$