Projektion på ett plan

Betrakta avbildningen P som geometriskt innebär projektion av vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ på planet $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Eftersom planet går genom origo är detta en linjär avbildning. Vi erhåller projektionen $P(\mathbf{x})$ genom att dela upp $\mathbf{x}$ i ortogonala komposanter $\mathbf{x} = \mathbf{x_n} + \mathbf{x_n}^{\perp}$ där $\mathbf{x_n}$ är projektionen av $\mathbf{x}$ på planets normal $\mathbf{n}$. Vektorn $\mathbf{x_n}^{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{n}$ och är den sökta projektionen. Denna beräknas alltså genom $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x_n}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x_n}$. Projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ beräknas enklast med projektionsformeln:

$$\mathbf{x_n} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}$$

Planets normal ges av koefficienterna i ekvationen, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.
Detta ger $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 2x_1 - 2x_2 + x_3$ och $\|\mathbf{n}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 9$.
Med beteckningen $P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x_n}$ har vi alltså

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{2x_1 - 2x_2 + x_3}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ -2(2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

På matrisform har vi

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

Här ser vi för övrigt också att denna projektion är en linjär avbildning, den ges ju av en matris. Nu har vi att $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x_n}$. Sätter vi $Id(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, identitetsavbildningen, så ges denna av enhetsmatrisen I. Med dessa beteckningar har vi

$$P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x_n} = Id(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (I - A)\mathbf{x}$$

Avbildningsmatrisen för P är alltså

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$