

Rotationer av objekt i 3d

Beräkning av rotationsmatrisen

Låt $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vara ortsvektorn för en punkt i rummet. Sambandet $\mathbf{r}' = M\mathbf{r}$, där

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ger då en vridning av $\mathbf{r}$ en vinkel θ kring z -axeln (fig). Vi vill nu vrida en punkt kring en axel genom origo med riktningsvektor

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Vi byter till en ny lämplig (högerorienterad) *ON-bas* $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ som väljs så att $\mathbf{f}_3 = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Vi kan sedan välja $\mathbf{f}_1$ och $\mathbf{f}_2$ på många sätt, bara de tillsammans med $\mathbf{f}_3$ utgör en högerorienterad *ON-bas*. Ett möjligt val är t.ex (om a och b inte båda är noll)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} ac \\ bc \\ -(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

Med $P = [\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3]$ (basbytesmatrisen) så ges sambandet mellan nya och gamla koordinater av $\mathbf{r} = P\boldsymbol{\rho}$, där $\boldsymbol{\rho} = [\mathbf{r}]_{\mathcal{B}}$ (koordinaterna för $\mathbf{r}$ i basen $\mathcal{B}$). I denna bas så ges matrisen för rotationen av matrisen M ovan. Vi får

$$\boldsymbol{\rho}' = M\boldsymbol{\rho}$$

och

$$\mathbf{r}' = P\boldsymbol{\rho}' = PM\boldsymbol{\rho} = PMP^{-1}\mathbf{r}.$$

Notera att eftersom kolonnerna i P utgör en ON-bas så är $P^{-1} = P^T$. Multiplikation med matrisen $R = PMP^T$ ger således en vridning med vinkeln θ kring vektorn $\mathbf{v}$. En samtidig vridning av flera ortsvektorer $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ åstadkommes genom matrismultiplikation

$$R[\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \dots \ \mathbf{r}_n] = [\mathbf{r}'_1 \ \mathbf{r}'_2 \ \dots \ \mathbf{r}'_n]$$

