MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 121008 kl. 08.30–12.30
ÖvningsTentamen | Telefonvakt: ....

MVE275 Linjär algebra AT

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Exempel: Om man har 23 poäng på tentans godkäntdel plus 5 bonuspoäng så har man 28 poäng på godkäntdelen. Har man sedan ytterligare 5 poäng på överbetygsdelen så innebär detL totalt 33 poäng på båda delarna och därmed betyget 4.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 9:e okt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Förklara vad som menas med begreppet *linjärt beroende mängd av vektorer* i $\mathbb{R}^n$. (2p)

(b) Låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}.$$

i. Avgör för vilket värde på h vektorerna $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ är linjärt beroende. (2p)

ii. För varje värde på h bestäm dimensionen av det underrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. (2p)

3. (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. (4p)

(b) Med hjälp av resultatet i (a) bestäm alla lösningar till följande system av differentialekvationer (2p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

4. Låt $\mathcal{P}$ vara det plan i $\mathbb{R}^3$ som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för $\mathcal{P}$. (3p)

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ på planet $\mathcal{P}$. (3p)

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en *fullständig* lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5.
- Definiera begreppet *underrum* i ett vektorrum. (6p)
- Låt $\mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med reella koefficienter och U mängden av alla polynom i $\mathbb{P}_2$ som uppfyller $p(1) = 0$.

  i. Visa att U är ett underrum i $\mathbb{P}_2$.

  ii. Bestäm en bas för U.

  Motivera väl.

6. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt motsvarar en spegling i planet $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. (6p)

- Bestäm F:s egenvärden och egenvektorer, dvs egenvärdena och egenvektorerna till F:s matris i standardbas.
- Bestäm $F(\mathbf{v})$ då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

7. Visa att om produkten AB av två kvadratiska matriser A och B är inverterbar så är både A och B inverterbara. (6p)

Lycka till!
Tommy G

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 121008	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Matriserna $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ $C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ är totalmatriser till tre linjära ekvationssystem. Lös dessa ekvationssystem (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) En linjär avbildning $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbildar vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bestäm standardmatrisen för F. Bestäm också bilden av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Bestäm en ortogonal bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ för $\mathbb{R}^2$ om $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm sedan koordinatvektorn $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ för $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i den bas $\mathcal{B}$ du hittat. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm inversen till matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Ange LU-faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....