

Tentamen MVE275 Linjär algebra AT

130117 kl. 08.30–12.30

Examinator: Tommy Gustafsson , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703 088 304

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

För godkänt på tentamen krävs 25 poäng på tentamens första del (godkändtdelen). Bonuspoäng från duggor 2012 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter 130117. Tentan rättas och bedöms anonymt.

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkändtdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad (14p)
inlämnas tillsammans med övriga lösningar.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 1 \ -2]^T$.

(a) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör nollrummet $\text{Nul } A$. (1p)

(b) Avgör om $\mathbf{v}$ tillhör kolonnrummet $\text{Col } A$. (2p)

Skriv i så fall $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av A 's kolonner.

(c) Bestäm baser för $\text{Col } A$ och $\text{Nul } A$. (3p)

3. Visa först att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning då (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm sedan minsta kvadrat-lösningen till ekvationssystemet ovan.

4. Låt (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A har egenvärdena -2 och 2 . Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ av egenvektorer till A .

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. I (6p)

denna bas är $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ avbildningsmatris för den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Bestäm $T(\mathbf{v})$ (i standardbas) då $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T$ (också i standardbas).

6. Låt $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3. Låt U_1 vara det underrum av $\mathbb{P}_3$ vars element är alla polynom p som uppfyller $p(-1) = p(1)$. Låt U_2 vara det underrum av U_1 vars element dessutom uppfyller $p(1) = 0$. Visa att $\dim U_1 = 3$ och $\dim U_2 = 2$ (6p)

Bestäm en bas $\{p_1, p_2\}$ för U_2 , fyll ut den till en bas $\{p_1, p_2, p_3\}$ för U_1 och slutligen till en bas $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ för hela $\mathbb{P}_3$.

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så får du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Låt n vara ett positivt heltal. För alla $n \times n$ matriser A och B gäller att $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(B)$. (2p)

(b) Om A och B är matriser så att $A^2 = B^2$ så är $A = B$ eller $A = -B$. (2p)

(c) Om A och B är inverterbara matriser så att $A+B$ är inverterbar, så är även $A^{-1}+B^{-1}$ inverterbar. (2p)

Lycka till!
Tommy Gustafsson

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 130117	sid.nummer 1	Poäng
------------	---------------------------------	-----------------	-------

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Lös ekvationen

(3p)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Lösning:

Svar:

(b) Låt

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}, \quad \mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Bestäm de tre koordinatbytesmatriserna (basbytesmatriserna) $P_{\mathcal{U}}$ (samma som ${}_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{U}}$), ${}_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{E}}$ och ${}_{\mathcal{V}}P_{\mathcal{U}}$ från basen $\mathcal{U}$ till standardbasen $\mathcal{E}$ i $\mathbb{R}^2$, från standardbasen $\mathcal{E}$ till basen $\mathcal{V}$ och från basen $\mathcal{U}$ till basen $\mathcal{V}$.

(3p)

Lösning:

Svar:

VÄND!

- (c) Ange LU -faktoriseringen av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hur kan du kontrollera att faktoriseringen är korrekt?

Lösning:

Svar:

- (d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & a & b \end{bmatrix}$. Bestäm a och b så att $\dim(\text{Nul } A) = 2$. (3p)

Lösning:

Svar:

- (e) Lös matrisekvationen $XA = B + 2X$, där (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: