Areaförändring och determinanter

Vi gick igenom följande på föreläsningen:

<u>Sats 3.3.10</u> Låt S vara ett parallellogram i $\mathbb{R}^2$, och låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning med standardmatris A.
Då är:

$$\{\text{arean av } T(S)\} = |\det(A)| \{\text{arean av } S\}.$$

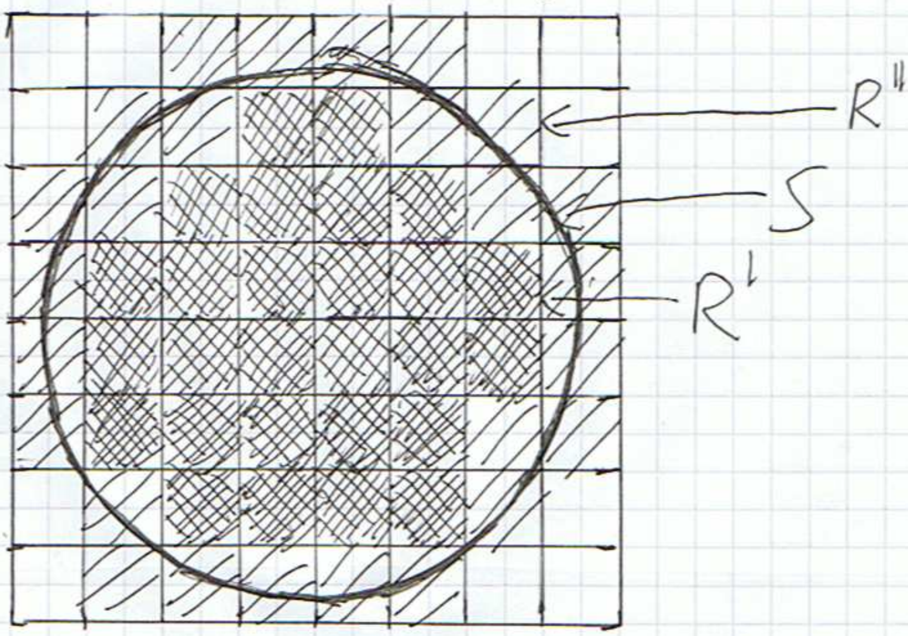
Här diskuteras hur detta generaliseras till andra områden än parallellogram.

I flervariabelanalyskursen så såg man hur man kan definiera arean av områden m.h.a. Riemannintegraler.
Om S är ett område i $\mathbb{R}^2$, så kan man definiera arean av S som

$$\{\text{arean av } S\} = \int_S dx\,dy.$$

Detta kan man tolka geometriskt på följande sätt från definitionen av integralen i termer av över- och undersummor.
Om man gör en indelning av $\mathbb{R}^2$ i ett rektangulärt rutnät, och låter R' vara alla rektanglar som ligger inuti S, och R'' alla rektanglar som precis

täcker S. Då kommer arean av S att ligga mellan arean av R' och arean av R'', se figur.



R' rutorna

S cirkelskivan

R'' rutorna och

Låter man rutnätet bli finare och finare, så kommer areorna av R' och R'' att hamna närmare och närmare arean av S, och går man i gräns, så kommer båda areorna att gå mot arean av S

(Detta under förutsättning att arean är definierad, t. ex. kommer alla par av rationella tal $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$ inuti $[0,1] \times [0,1]$ inte ha en väldef. area, för i detta fall kommer R' alltid ha area 0, och R'' area minst 1, oavsett hur fin man gör indelningen!)

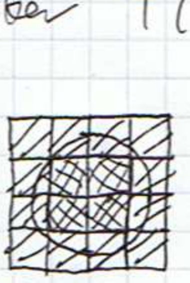
Man kan visa att man inte behöver ha ett rektangulärt rutnät i metoden ovan, utan att man lika gärna kan låta rutorna bestå av lika stora parallellogram.
Vi skall nu se att detta ger att formeln för areaförändring (Sats 3.3.10) då gäller för alla områden av ändlig area

Sats Låt S vara ett område i $\mathbb{R}^2$ med ändlig area, och låt $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avb. med std. matris A.
Då är

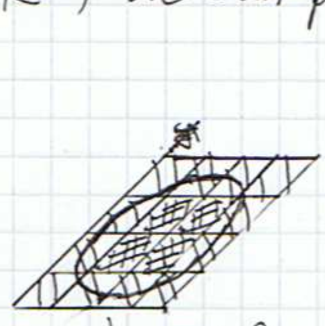
$$\{\text{arean av } T(S)\} = |\det(A)| \{\text{arean av } S\}.$$

För att bevisa detta börjar vi som ovan, och delar in $\mathbb{R}^2$ i ett rutnät, och låter R' och R'' vara som ovan, dvs R' är alla rektanglar inuti S, och R'' alla som precis täcker S.

T kommer nu avbilda det rektangulära rutnätet i $\mathbb{R}^2$ på ett nytt rutnät med parallellogram, och $T(R')$ kommer vara alla parallellogram i rutnätet som ligger inuti $T(S)$, och $T(R'')$ de som precis täcker $T(S)$.



R', S och R''



$T(R')$, $T(S)$ och $T(R'')$

Går vi nu i gräns genom att låta rutnätet bli finare och finare, så kommer areorna av $T(R')$ och $T(R'')$ att gå mot arean av $T(S)$. Men enligt Sats 3.3.10, så är

$$(*) \quad \{\text{arean av } T(R')\} = |\det(A)|\{\text{arean av } R\}.$$

Går vi i gräns i $(*)$ så går alltså vänsterledet mot arean av $T(S)$ och högerledet mot $|\det A|$ · gånger arean av S, och vi har visat satsen.

<u>Anmärkning:</u> Att satsen gäller för godtyckliga områden S med ändlig area följer också av formeln för variabelbyte i dubbelintegraler.

Beviset av ~~[illegible]~~ formeln för variabelbyte bygger också på Sats 3.3.10, och fortsättningen av beviset är liknande resonemanget vi hade ovan.

Vi tar här ett lite mer utförligt exempel.
(Area av sned ellips)

Ex Beräkna arean av området

$$S' = \{ 5y_1^2 - 6y_1y_2 + 5y_2^2 \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

genom att använda att under avbildningen

$$\bar{y} = T(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \bar{x}$$

så kommer S' att vara bilden $S' = T(S)$ av ett bekant geometriskt objekt S.

Vi får från avb. T att $y_1 = 2x_1 + x_2$
och $y_2 = 2x_1 - x_2$.

Skriver vi om uttrycket för området i termer av x_1 och x_2 får vi: $5y_1^2 - 6y_1y_2 + 5y_2^2 =$

$$= 5(2x_1 + x_2)^2 - 6(2x_1 + x_2)(2x_1 - x_2) + 5(2x_1 - x_2)^2$$

$= \{$ utveckla parenteser och förenkla $\} =$

$$= 16x_1^2 + 16x_2^2.$$

Området uttryckt i x_1, x_2 blir alltså

$$\{ 16x_1^2 + 16x_2^2 \leq 1 \} = \{ x_1^2 + x_2^2 \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \},$$

dvs en cirkelskiva med centrum i origo, och radie $1/4$.

Så om vi låter $S = \{ x_1^2 + x_2^2 \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 \}$ så är då S' bilden under T av S, dvs $S' = T(S)$.

T har standardmatrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

och $|\det(A)| = |-2-2| = 4$.

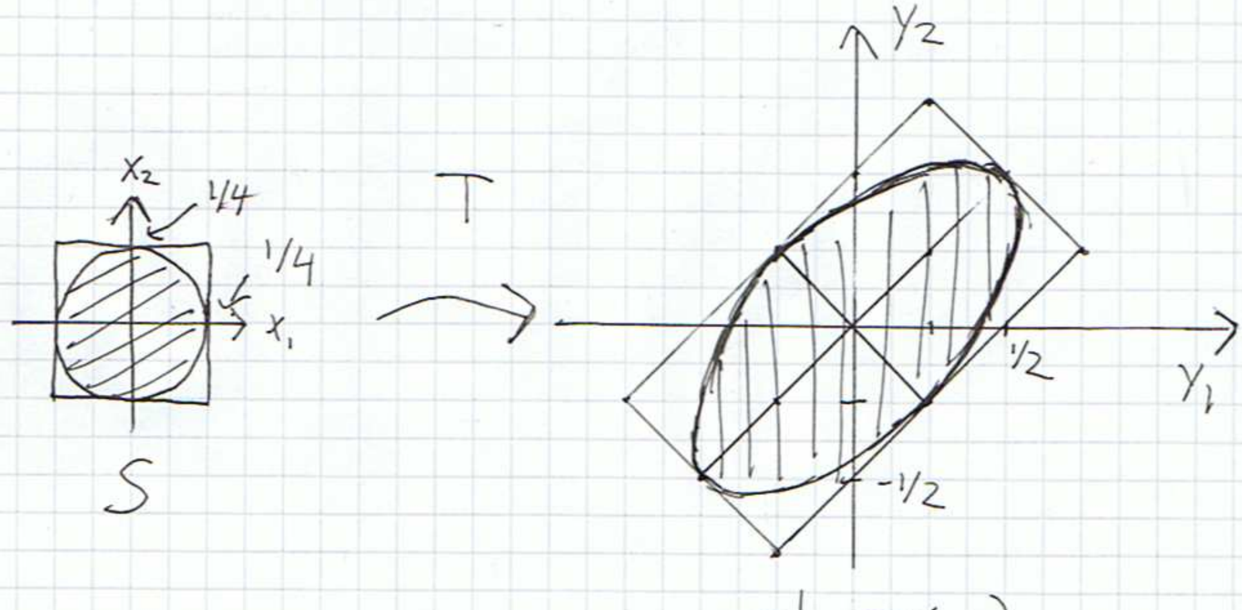
S har arean $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2$.

Vi får då enligt satsen att

$$\{\text{arean av } S'\} = \{\text{arean av } T(S)\} =$$
$$= |\det A|\{\text{arean av } S\} = 4\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \pi/4.$$

En kommentar om exemplet:

Om man ritar upp S' t.ex. m.h.a. Matlab, eller genom att använda att det är bilden av S under T, så ser man att S' är en sned ellips:



$S' = T(S)$

(Axlarna i ellipsen är bilden av x_1- och x_2-axlarna under T.)

Att räkningarna i detta exemplet fungerade byggde på att vi fick avbildningen T given. Vi skall se i vecka 6 hur man från en sned ellips S' kan få fram en avb. T m.h.a. ekvationen för S', s.a. $S' = T(S)$ där S är en cirkelskiva.