

INVERTERBARA LINJÄRA AVBILDNINGAR

MVE275 – LINJÄR ALGEBRA AT, CHALMERS, 2013/14

Vi skall här se att annan metod för att komma fram till att en $n \times n$ -matris med n pivotpositioner är inverterbar. För att göra detta inför vi begreppet inverterbarhet av en linjära avbildningar, och visar att detta är samma som inverterbarhet av dess standardmatris.

Definition 1. En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är inverterbar om T är injektiv och surjektiv (det vill säga, T är bijektiv).

Enligt allmän teori om inversa funktioner (se till exempel Adams, *Calculus*, avsnitt 3.1), så är T bijektiv om och endast om det finns en *invers funktion* $S = T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$(1) \quad S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{och} \quad T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Sats 1. Om $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är en inverterbar linjär avbildning, då är $S = T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en linjär avbildning.

Bevis. Om $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, låt

$$(2) \quad \mathbf{v}_1 = S\mathbf{u}_1 \quad \text{och} \quad \mathbf{v}_2 = S\mathbf{u}_2.$$

Då är enligt (1),

$$(3) \quad T\mathbf{v}_1 = T(S\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 \quad \text{och} \quad T\mathbf{v}_2 = T(S\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2.$$

Vi vill nu visa att S är linjär, det vill säga

$$S(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = S\mathbf{u}_1 + S\mathbf{u}_2 \quad \text{och} \quad S(c\mathbf{u}_1) = cS\mathbf{u}_1 \quad \text{om } c \in \mathbb{R}.$$

Vi har att

$$S(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \{ \text{enligt (3)} \} = S(T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2) = \{ T \text{ är linjär} \} = S(T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)).$$

Enligt (1) får vi då att

$$S(T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \{ \text{enligt (2)} \} = S\mathbf{u}_1 + S\mathbf{u}_2.$$

Alltså uppfyller S det första villkoret för linjäritet, och det andra visas på liknande sätt:

$$S(c\mathbf{u}_1) = S(cT\mathbf{v}_1) = S(T(c\mathbf{v}_1)) = c\mathbf{v}_1 = cS\mathbf{u}_1,$$

där likheterna följer av samma skäl som i ekvationerna ovan (tänk igenom detta!). $\square$

Tack vare detta kan vi nu ge ännu en karakterisering av inverterbara matriser. Vi påminner först om kopplingen mellan linjära avbildningar och matriser.

Sats 2. Låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då finns en unik matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Matrisen A , som kallas för standardmatrisen för T ges av

$$A = ((T\mathbf{e}_1) \ \dots \ (T\mathbf{e}_n)).$$

Bevis. Bevis av detta gav jag på en tidigare föreläsning förutom påståendet att matrisen A är unik. För att se att A är unik, så antar vi att det också finns en matris B som uppfyller att $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, och vi vill då se att $B = A$. Om vi betraktar $T(\mathbf{e}_i)$, så får vi enligt definition av A att $T(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$. Eftersom $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, så får vi också att $T(\mathbf{e}_i) = B\mathbf{e}_i = \mathbf{b}_i$, så $\mathbf{a}_i = T(\mathbf{e}_i) = \mathbf{b}_i$, och alltså är kolonnerna i A och B samma, dvs. $A = B$, så standardmatrisen är unik. $\square$

Anmärkning 1. Dessutom får vi som en enkel konsekvens av hur multiplikation av matriser är definierad att om $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning med standardmatris A , och om $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ är en linjär avbildning med standardmatrisen B , så är standardmatrisen för den linjära avbildningen $S \circ T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ lika med AB , eftersom

$$S(T(\mathbf{x})) = A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}.$$

Sats 3. Låt A vara en $n \times n$ -matris, och låt $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara den linjära avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (det vill säga A är standardmatrisen för T). Då är T en inverterbar linjär avbildning om och endast om A är en inverterbar matris.

Bevis. Antag först att T är inverterbar, och låt S vara den inversa avbildningen $S = T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Enligt Sats 1, så är S en linjär avbildning.

Om vi låter C vara standardmatrisen för S , så får vi enligt anmärkningen ovan att $S \circ T$ har standardmatrisen CA , och att $T \circ S$ har standardmatrisen AC . Men enligt (1), så är $S \circ T$ och $T \circ S$ båda lika med identitetsavbildningen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ på $\mathbb{R}^n$. Alltså har både $S \circ T$ och $T \circ S$ standardmatrisen I_n , och eftersom standardmatrisen för en linjär avbildning är unik får vi att

$$AC = I_n = CA,$$

vilket är precis definitionen av att A är inverterbar, med invers C .

Om vi nu antar att A är inverterbar, så vill vi då visa att T är inverterbar, det vill säga, att det finns en invers funktion $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ som uppfyller (1). Eftersom A är inverterbar, så finns det en invers matris A^{-1} som uppfyller

$$(4) \quad AA^{-1} = I_n \quad \text{och} \quad A^{-1}A = I_n.$$

Om vi då låter $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$, så får vi då enligt (4)

$$T(S(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{och} \quad S(T(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Alltså uppfyller S villkoren i (1), så T är inverterbar. $\square$

Som avslutning kan vi nu visa följande sats på ett annat sätt än som görs i Lay (vilket där görs genom att gå via elementära matriser) och som också var det sättet jag gick igenom på föreläsningen.

Sats 4. Låt A vara en $n \times n$ -matris. Om A har n stycken pivotpositioner, så är A inverterbar.

Bevis. Från koppligen mellan lösningarna till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och trappstegsformen för totalmatrisen $(A \mid \mathbf{b})$, så ser man att A har n pivotpositioner om och endast om ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ betyder precis att den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv, och att lösningen är unik betyder att T är injektiv.

Alltså får vi att om A har n pivotpositioner, så är $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en inverterbar linjär avbildning. Enligt föregående sats får vi då att A är inverterbar, vilket är precis vad vi skulle bevisa. $\square$

Att man kan gå åt andra hållet är lättare, och är väsentligen Sats 2.2.5 i Lay (tillsammans med första delen av beviset ovan, att A har n pivotpositioner om och endast om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik lösning för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$) som jag också gick igenom på föreläsningen, och detta bygger inte på elementära matriser.