Transformationer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ och Platonska kroppar

Inledning

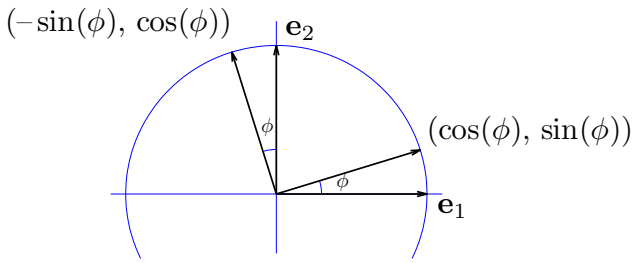
Vi skall se på några geometriska transformationer; rotation, skalning, translation och projektion.

Rotation och skalning är linjära avbildningar och kan beskrivas med standardmatriser, däremot är translation *inte* en linjär avbildning. När det gäller projektion får vi skilja på olika fall, t.ex. en ortogonal projektion i $\mathbb{R}^3$ på ett plan är en linjär avbildning om och endast om planet går genom origo.

Avslutningsvis skall vi se lite på Platonska kroppar.

Rotation, skalning och translation

Som exempel på rotation tar vi: Låt $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en rotation motsols med vinkeln ϕ runt origo.



Vi får

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

med standardmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

Betraktar vi en punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $\mathbb{R}^2$ som vi vill rotera runt origo så ges dess nya position av $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Låt $\mathbf{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en skalning med faktorerna s_1 och s_2 i respektive axelriktning. Vi får

$$\mathbf{S}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}$$

En translation med vektorn $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$ ges av avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

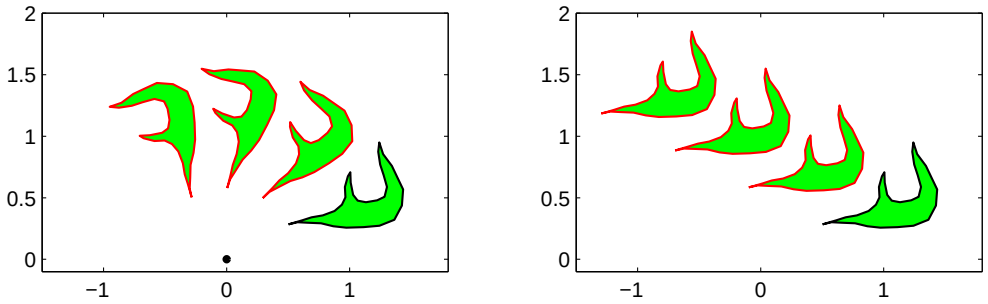
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

men här finns ingen standardmatris.

Vi illustrerar rotation och translation i $\mathbb{R}^2$ med MATLAB. I figuren nedan till vänster ser vi ett polygonområde med svart rand som vi roterar några gånger med vinkeln $\frac{\pi}{6}$ och ritar de roterade områdena med röd rand.

Vi tänker oss att vi redan skapat koordinater i radvektorerna `X` och `Y` som beskriver det ursprungliga området.

```
fill(X,Y,'g','edgecolor','k','linewidth',1), hold on
axis equal, axis([-1.5 2 -0.1 2]), pause(1)
v=pi/6; A=[cos(v) -sin(v); sin(v) cos(v)];
P=[X;Y];
for i=1:3
    P=A*P;   % Varje koordinatpar roteras med vinkeln pi/6
    fill(P(1,:),P(2,:),'g','edgecolor','r','linewidth',1), pause(1)
end
plot(0,0,'ko','linewidth',2,'markersize',2)  % origo
hold off
```



Till höger ser vi samma område i ursprungsläget (svart kant) samt några upprepade translationer (röd kant) med vektorn t.

```
fill(X,Y,'g','edgecolor','k','linewidth',1), hold on
axis equal, axis([-1.5 2 -0.1 2]), pause(1)
t=[-0.6;0.3];
P=[X;Y];
for i=1:3
    P=P+t*ones(size(X));
    fill(P(1,:),P(2,:),'g','edgecolor','r','linewidth',1), pause(1)
end
hold off
```

Uppgift 1. Rotera och translatera ett polygonområde ni genererar själva, t.ex. en triangel.

Betrakta nu en punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbb{R}^3$. Rotation kring x_1-, x_2- och x_3-axlarna ges av $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, där $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ med följande respektive standardmatriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

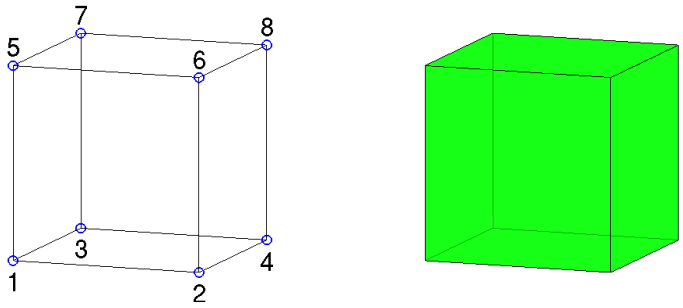
Skalning i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

och translation av

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

Nu ritar vi en kub som vi sedan skall transformera på lite olika sätt.



Vi ritar kuben enligt

```
H=[0 1 0 1 0 1 0 1      % H(:,j), j:te kolonnen i H, ger koordinater för punkt j
   0 0 1 1 0 0 1 1
   0 0 0 0 1 1 1 1];
S=[1 2 4 3              % S(i,:), i:te raden i S, ger nr på hörnpunkter på sida i
   1 2 6 5
   1 3 7 5
   3 4 8 7
   2 4 8 6
   5 6 8 7];            % size(S,1) ger antal sidor
figure(1), clf
hold on
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); fill3(H(1,Si),H(2,Si),H(3,Si),'g','facealpha',0.7)
end
hold off
axis equal, axis tight, axis off, view(20,10)
```

Lägg lite tid på att tänka igenom det vi gjort. Hörnpunkternas koordinater ligger som kolonner i matrisen `H`. På raderna i matrisen `S` har vi numren på hörnpunkterna på sidorna, t.ex. första raden (`1 2 4 3`) ger numren på hörnpunkterna som ger botten på kuben.

Antal kolonner i `H`, som ges av `size(H,2)`, är antalet hörnpunkter. Antalet rader i `S`, som ges av `size(S,1)`, är antalet sidor.

Med `for`-satsen ritar vi upp alla sidor. Vi plockar ut en sidas hörnpunkter med `Si=S(i,:)` och motsvarande kolonner i `H`, dvs. `H(:,Si)` ger koordinaterna för hörnpunkterna.

Vi ritar sidan med `fill3`, som fungerar som `fill` fast i rummet. Här måste vi separera x_1-, x_2- och x_3-koordinaterna. Med `H(1,Si)` får vi x_1-koordinaterna för hörnpunkterna på sidan, osv.

Vi får kuben lite lätt genomskinlig med `'facealpha',0.7`. För solid kub sätt `'facealpha',1` eller utelämna. Med `axis equal` får vi skalor på axlarna så att en kub ser ut som en kub och inte blir tillplattad. Vidare ger `axis tight` ett koordinatsystem *utan* luft runt kuben som vi ritat och `axis off` gör att axlarna och skalmarkeringar inte syns. Med `view(20,10)` ges betraktelsevinklar, se gärna hjälptexterna.

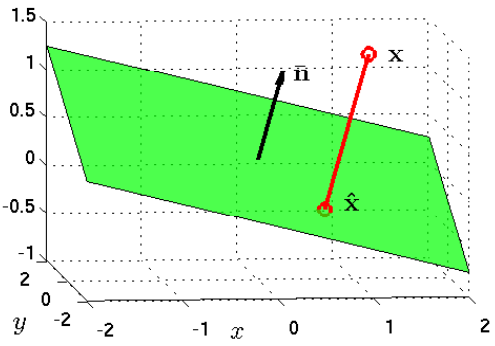
Uppgift 2. Rotera kuben runt någon axel. Gör en translation av kuben bort från origo. Rotera den åter runt någon axel.

Ortogonal projektion

Vi skall bestämma ortogonala projektionen på planet

$$ax + by + cz = d$$

Planet har normalvektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)$. I bilden har vi ritat enhetsnormal $\bar{\mathbf{n}}$ och ortogonala projektionen $\hat{\mathbf{x}}$ längs enhetsnormalen av en punkt $\mathbf{x}$.



Vi gör ansatsen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n}$, där α skall bestämmas så att $\hat{\mathbf{x}}$ ligger på planet. Ekvationen för planet kan skrivas

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{x}} = d$$

och sätter vi in ansatsen får vi

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \alpha\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = d$$

och därmed

$$\alpha = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$$

Nu skall vi i MATLAB rita planet $ax + by + cz = d$, för $a = 1, b = -1, c = 4$ och $d = 1$. Eftersom $c \neq 0$ så kan vi lösa ut z, i annat fall får vi modifiera koden

```
xmin=-2; xmax=2; ymin=-2; ymax=2;
a=1; b=-1; c=4; d=1;
X=[xmin xmax xmax xmin]; Y=[ymin ymin ymax ymax];
Z=(d-a*X-b*Y)/c;
figure(1), clf
fill3(X,Y,Z,'g','facealpha',0.7)
xlabel('x'), ylabel('y')
grid on
```

Resultatet blir planet i figuren ovan.

Uppgift 3. Rita planet vi just tittade på. Bestäm normalvektorn och rita ut den som ett streck från en punkt på planet. Välj en punkt $\mathbf{x}$, rita ut den, bestäm dess ortogonala projektion $\hat{\mathbf{x}}$ på planet och rita ut även denna punkt.

Vad blir formeln för spegling i planet? Rita även ut speglingen $\mathbf{x}_r$ av $\mathbf{x}$.

Uppgift 4. Om $d = 0$ i ekvationen för planet så går planet genom origo. Då blir ortogonala projektionen en linjär avbildning. Vad blir standardmatrisen?

Uppgift 5. Rita planet från uppgift 3. I samma bild skall ni rita en translaterad kub. Translationen skall vara sådan att kuben inte skär planet. Rita därefter speglingen av kuben i planet.

Några Platonska kroppar

Vi skall se på några Platonska kroppar. Dessa är konvexa tre-dimensionella polyedrar som har likformiga polygoner som sidor. Lika många sidor möts i varje hörn och alla hörn är lika. Det finns precis fem Platonska kroppar (tetraeder, kub, oktaeder, dodekaeder och ikosaeder). I sammanhanget vill vi även nämna Arkimediska kroppar. Dessa har lika hörn men sidorna kan vara olika polygoner. Det finns tretton sådana. Titta gärna tillbaka på Ture Westers lilla bok "Structural Order in Space" som ni nog läste under första årets vårtermin.

Vi börjar med att rita en liksidig tetraeder med hörnpunkter på enhetssfären och hörnpunkternas koordinater som

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3}\right), \quad (0, 0, 1)$$

Först lagrar vi koordinaterna som kolonner i en matris `H` i MATLAB enligt

```
a=2*sqrt(2)/3; b=-sqrt(2)/3; c=sqrt(2/3); d=-1/3;
H=[ a  b  b  0
    0  c -c  0
    d  d  d  1 ];
```

därefter tar vi och skriver ut de olika hörnens nummer på respektive plats i rummet, notera att `size(H,2)` ger antal kolonner i `H`, dvs. antal hörnpunkter

```
figure(1), clf
axis equal, axis([-2 2 -2 2 -2 2]), axis off, axis vis3d
hold on
for i=1:size(H,2)
    text(H(1,i),H(2,i),H(3,i),num2str(i))
end
```

Skriv in detta i MATLAB så blir det begripligt. Vi kan vända och vrida så vi ser var hörnen är placerade. Nu skall vi bilda en matris `S` som skall hålla ordning på vilka hörnpunkter som är hörn på de olika sidorna i tetraedern. På rad 1 i `S`, dvs. `S(1,:)`, lagrar vi numren på hörnen på sidan 1, osv.

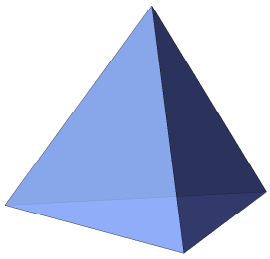
```
S=[ 1  2  3
    1  2  4
    1  3  4
    2  3  4 ];
```

Nu kan vi rita upp sidorna med `fill3`, notera att `size(S,1)` är antal rader i `S`, dvs. antal sidor på tetraedern

```
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); fill3(H(1,Si),H(2,Si),H(3,Si),[0.4 0.5 1],'facealpha',0.2)
end
hold off
```

Det är förståndigt att bygga upp `S` rad för rad, och använda koden ovan för att rita fler och fler av tetraederns sidor. På så sätt ser vi vilka sidor vi inte redan har beskrivit.

Så här ser tetraedern ut när vi är färdiga (vi har lagt på belysning också).



Vi kan på samma sätt göra en matris `K` som håller reda på alla kanter på tetraedern.

```
K=[ 1  2
    1  3
    2  3
    1  4
    2  4
    3  4 ];
```

Nu när vi kommit fram till hur `H` och `S` skall se ut kan vi samla ihop koden för att rita tetraedern och för att lägga på lite belysning och sådant

```
a=2*sqrt(2)/3; b=-sqrt(2)/3; c=sqrt(2/3); d=-1/3;
H=[ a  b  b  0
    0  c -c  0
    d  d  d  1 ];
S=[ 1  2  3
    1  2  4
    1  3  4
    2  3  4 ];
```

```
figure(1), clf
hold on
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); fill3(H(1,Si),H(2,Si),H(3,Si),[0.4 0.5 1],'facealpha',0.8)
end
hold off
axis equal, axis tight, axis off, axis vis3d
view(-30,20)
material shiny
camlight left, camlight head
```

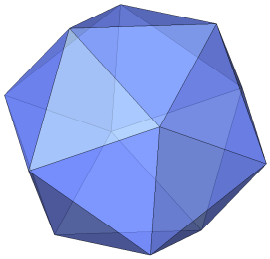
Uppgift 6. Nu är det dags för ikosaedern. Den består av 20 liksidiga trianglar. Koordinaterna för hörnpunkterna kan vi ta som

$$(0, \pm 1, \pm\varphi)\,, \quad (\pm 1, \pm\varphi, 0)\,, \quad (\pm\varphi, 0, \pm 1)$$

där $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (gyllene snittet).

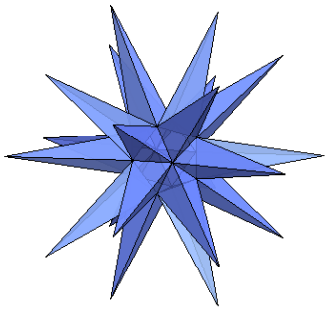
Om vi vill att hörnpunkterna skall ligga på enhetssfären skalar vi med faktorn $s = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

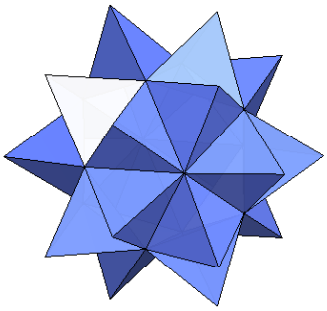
Rita nu upp ikosaedern genom att använda samma teknik som för tetraedern. Vi får jobba lite mer, vi har 12 hörn (istället för 4) och vi har 20 sidor (istället för 4). Något liknande följande bild bör ni komma fram till.



Stjärnformering

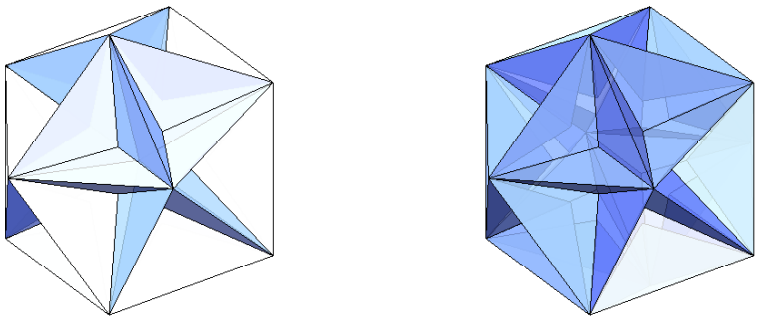
Nu kan vi göra en stjärna av vår ikosaeder. Vi tar ut mittpunkten på varje sida och ritar tre små triangel-flak istället för ett (för varje sida).





Här ovan skjuter vi ut mittpunkten ...

... och här nedan drar vi in den.



Koden för att rita sidorna ersätts med

```
for i=1:size(S,1)
    Si=S(i,:); Mi=(H(:,Si(1))+H(:,Si(2))+H(:,Si(3)))/3; % Mittpunkten på sida nr i
    Mi=Mi*5;  % Skalning, pröva olika faktorer. Med 5 får du en långarmad stjärna.
    fill3([H(1,Si(1:2)) Mi(1)],[H(2,Si(1:2)) Mi(2)],[H(3,Si(1:2)) Mi(3)],...
          [0.4 0.5 1],'facealpha',0.8)
    fill3([H(1,Si(2:3)) Mi(1)],[H(2,Si(2:3)) Mi(2)],[H(3,Si(2:3)) Mi(3)],...
          [0.4 0.5 1],'facealpha',0.8)
    fill3([H(1,Si([3,1])) Mi(1)],[H(2,Si([3,1])) Mi(2)],[H(3,Si([3,1])) Mi(3)],...
          [0.4 0.5 1],'facealpha',0.8)
end
```

Dessa stjärnformiga polyedrar är inte Platonska kroppar (varför?).

Uppgift 7. Modifiera nu er kod. Prova lite olika värden på skalfaktorn (även negativa värden är kul) och vänd och vrid.