MVE275 Linjär algebra AT

Lösningar

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Standardmatrisen för T ges av $\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$. Här är

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \; T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

och $\quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

SVAR: Standardmatrisen för T är $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

(b) Vi bestämmer inversen genom att utföra radoperationer på den utökade matrisen

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

SVAR: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Vi vill lösa ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Efter den vanliga Gausseliminationen erhåller man lösningen $c_1 = -2$, $c_2 = 1$.
SVAR: $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(d) Den bästa linjen har ekvationen $y = a + bt$ där

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vi löser normalekvationen $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$ där

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Den utökade matrisen för normalekvationen ges av

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right]$$

Detta visar att $a = 2$ och att $b = 5/2$.
SVAR: Den bästa linjens ekvation är $y = 2 + \frac{5}{2}t$

(e) Vi har att

$$AX + B = X \Leftrightarrow AX - X = -B \Leftrightarrow (A - I)X = -B.$$

Den utökade matrisen ges av

$$[A-I|-B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Svar: $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) Vi radreducerar matrisen A till trappstegsform

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & p+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & p+5 \end{bmatrix}$$

Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en icke-rivial lösning om och endast om sista raden endast består av nollor, dvs om och endast om $p = -5$. (Det är precis då vi får en fri variabel!)

(b) Enligt Cramers regel är

$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}}.$$

Man kan beräkna båda determinanterna via kofaktor expansioner längs tredje raden, säg. Då ser vi att

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 3(2) = -7,$$

och

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 7(2) = -15.$$

Svar : $x_2 = (-7)/(-15) = 7/15$.

3. (a) Talet λ sägs vara ett *egenvärde* till A om det finns en vektor $\mathbf{v}$ sådan att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ och $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Vektorn $\mathbf{v}$ sägs då vara en *egenvektor* till A.

(b) Vi måste diagonalisera A. Dess karakteristiska ekvation lyder

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 0 \\ -3 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

som har de tre rötterna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$.
Härnäst bestämmer vi motsvarande egenvektorer.
$\lambda_1 = 1$: Då är

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi ser direkt att en egenvektor är $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$: Då är

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor är $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\lambda_3 = 4$: Då är

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En egenvektor är $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Då har vi att $A = PDP^{-1}$ där

$$P = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi radreducerar matrisen A till trappstegsform

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangen för en matris är lika med antalet pivotkolonner så $\operatorname{Rank} A = 2$ och de två första kolumnera i A utgör en bas för kolonnrummet

Svar: $\operatorname{Rank} A = 2$ och $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ är en bas för $\operatorname{Col} A$

(b) Vi löser ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Den reducerade trappstegsformen för A ovan ger att variabeln $x_3 = -t$ är fri och

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

Svar: En bas för $\operatorname{Nul} A$ är vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(c) Basen ovan till $\operatorname{Col} A$ är inte en ON-bas. Vi förvandlar vi dessa till en ortogonalbas genom att sätta $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ och

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - proj_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - \left(\frac{-3}{3}\right)\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Det återstår att normalisera. Sätt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||} = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Då utgör $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ den efterlängtade ON-basen för $\operatorname{Col} A$.

Del 2: Överbetygsdelen

5. (a) Här skall vi kontrollera att $F(p+q) = F(p) + F(q)$ och $F(c\cdot p) = c\cdot F(p)$.
I huvudsak är detta en följd av att $(p+q)' = p' + q'$, $(p+q)(x+1) = p(x+1) + q(x+1)$ samt att $(c\cdot p)' = c\cdot p'$, $(c\cdot p)(x+1) = c\cdot p(x+1)$.

(b) F:s matris i standardbaserna ges av $M = \begin{bmatrix} [F(1)]_{\mathcal{E}} & [F(x)]_{\mathcal{E}} & [F(x^2)]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix}$ där $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3\}$ är standardbasen för $\mathbb{P}_3$. Vi opererar på basvektorerna med F:

$$\begin{aligned} F(1) &= x\cdot 0 + x\cdot 1 = x, \\ F(x) &= x\cdot 1 + x\cdot(x+1) = x^2 + 2x, \\ f(x^2) &= x\cdot(2x) + x\cdot(x+1)^2 = x^3 + 4x^2 + x. \end{aligned}$$

Härav följer att F:s matris ges av $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Koordinaterna för polynomet $x^2 + 3x + 4$ i standardbasen för $\mathbb{P}_2$ är $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Koordinaterna för $F(x^2 + 3x + 4)$ i basen $\mathcal{E}$ är därför

$$M\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alltså är $\quad F(x^2 + 3x + 4) = x^3 + 7x^2 + 11x.$

6. Se kursboken eller föreläsningsanteckningar.

7. (a) Vi undersöker först om de givna vektorerna är egenvektorer.

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1,$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4}\mathbf{v}_2,$$

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\tfrac{1}{4}\mathbf{v}_3.$$

Detta visar att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ är egenvektorer hörande till egenvärdena $1, \frac{1}{4}$ respektive $-\frac{1}{4}$.
Den allmänna lösningen ges därför av

$$\mathbf{x}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{v}_2 + c_3\left(-\frac{1}{4}\right)^n \mathbf{v}_3$$

där c_1, c_2 och c_3 är godtyckliga konstanter.

(b) $\lambda = 1$ är ett egenvärde till matrisen A precis då $\det(A - I) = 0$. Här är

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} = \text{"addera de } n-1 \text{ första raderna till den sista"} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{i1}-1 & \sum_{i=1}^{n} a_{i2}-1 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} a_{in}-1 \end{vmatrix} = \text{"alla summor är lika med 1"} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Och vi är klara!!