

SKALÄRPRODUKTER OCH EKVATIONER FÖR PLAN I $\mathbb{R}^3$

MVE275 – LINJÄR ALGEBRA AT, CHALMERS, 2013/14

1. SKALÄRPRODUKT OCH ORTOGONALITET

Vi ger här en kort repetition av de begrepp från kursen i inledande matematik (främst kapitel 10 i Adams) som används i delen av datorlaborationen som handlar om ortogonalprojektion.

Definition 1. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^n$, så är skalärprodukten av dem definierad av

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u^t \mathbf{v} = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Längden (eller normen) av $\mathbf{u}$ är

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Med hjälp av cosinus-satsen kan man se följande i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\theta),$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Definition 2. Vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är ortogonala om

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0.$$

Om vi är i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u} \neq 0$, $\mathbf{v} \neq 0$, och $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$, så är alltså $\cos \theta = 0$, dvs., $\theta = \pi/2$, så θ är en rät vinkel.

2. EKVATIONER FÖR PLAN I $\mathbb{R}^3$

Ett plan i $\mathbb{R}^3$ ges av en ekvation

$$ax + by + cz = d.$$

Då är $\mathbf{n} = (a \ b \ c)^t$ en *normal* till planet, dvs. om $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ och $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ är två punkter i planet, så är $\overrightarrow{P_1 P_2} \bullet \mathbf{n} = 0$, eftersom

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1 P_2} \bullet \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)a + (y_2 - y_1)b + (z_2 - z_1)c \\ &= (x_2 a + y_2 b + z_2 c) - (x_1 a + y_1 b + z_1 c) \\ &= d - d = 0. \end{aligned}$$

Geometriskt är normalen till ett plan alltså en vektor som är vinkelrät mot vektorn som går mellan två punkter i planet.