

Satsen om inverterbara matrisers egenskaper

Invertible Matrix Theorem

Låt A vara en kvadratisk $n \times n$ -matris .
Då är följande utsagor ekvivalenta.

- a. A är en inverterbar matris.
- b. A är radekvivalent med I_n .
- c. A har n pivotpositioner.
- d. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har endast den triviala lösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- e. Kolonnerna i A är linjärt oberoende.
- f. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är injektiv.
- g. Ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har minst en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

- h. Kolonnerna i A spänner upp $\mathbb{R}^n$.
- i. Den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är surjektiv.
- j. Det finns en $n \times n$ -matris C sådan att $CA = I$.
- k. Det finns en $n \times n$ -matris D sådan att $AD = I$.
- l. A^T är en inverterbar matris.
- m. Kolonnerna i A bildar en bas för $\mathbb{R}^n$.
- n. $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$
- o. $\dim \text{Col } A = n$
- p. $\text{Rank } A = n$
- q. $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$
- r. $\dim \text{Nul } A = 0$

$(a) \Leftrightarrow (b)$ (Sats 2.7)

$(b) \Leftrightarrow (c)$ (def. av pivotelement och

$\# \text{ kolonner} = \# \text{ rader} = n$)

(Notera att begreppet pivotelement "vilar" på vetskapen att en matris A är radekvivalent med precis en reducerad trappstegsmatris.)

$(c) \Leftrightarrow (d)$ (fria variabler saknas och

$\# \text{ pivotelement} + \# \text{ fria variabler} = n$)

$(d) \Leftrightarrow (e)$ (def. av linjärt oberoende)

$(d) \Leftrightarrow (f)$ (Sats 1.11)

$(c) \Leftrightarrow (g)$ (Sats 1.4)

$(g) \Leftrightarrow (h)$ (def. av spänna upp)

$(g) \Leftrightarrow (i)$ (Sats 1.12)

$(a) \Rightarrow (j)$ (tag $C = A^{-1}$)

$(a) \Rightarrow (k)$ (tag $D = A^{-1}$)

$(j) \Rightarrow (d)$ (om $\mathbf{x}$ är lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ så är
 $\mathbf{x} = C A \mathbf{x} = C \mathbf{0} = \mathbf{0}$)

$(k) \Rightarrow (g)$ ($\mathbf{x} = D \mathbf{b}$ är lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$)

$(a) \Leftrightarrow (l)$ (Sats 2.6)