MVE275 Linjär algebra AT

Svar till frågor

OBS: Här finns endast svar till frågorna, inte lösningar. På frågorna som handlar om baser finns det andra möjliga svar.

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) SVAR: $x = -2$.

(b) SVAR:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{U}} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ och } \underset{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) SVAR:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d) SVAR: $a = -3$, $b = 7$.

(e) SVAR:

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) SVAR: $\mathbf{v}$ tillhör inte $\mathrm{Nul}(A)$.

(b) SVAR: $\mathbf{v}$ tillhör $\mathrm{Col}(A)$ och $\mathbf{v} = 4\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4$.

(c) SVAR: Kolonn 1, 2 och 4 ur A bildar en bas för $\mathrm{Col}(A)$, dvs

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vektorn

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bildar en bas för $\mathrm{Nul}(A)$.

3. SVAR:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

är en minstakvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

4. SVAR:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bildar en ON-bas för $\mathbb{R}^4$ bestående av egenvektorer till A.

Del 2: Överbetygsdelen

5. SVAR:

$$T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

6. SVAR: U_2 har som bas $p_1(x) = 1 - x^2, p_2(x) = -x + x^3$.

U_1 har som bas $p_1(x), p_2(x), p_3(x) = 1 + x^2$.

$\mathbb{P}_3$ har som bas $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x) = x^3$

7. (a) SVAR: Sant, följer av rang-satsen och att $\mathrm{Nul}(B) \subseteq \mathrm{Nul}(AB)$, så att $\dim \mathrm{Nul}(B) \leq \dim \mathrm{Nul}(AB)$.

(b) SVAR: Falskt, kan tex ta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) SVAR: Sant,

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1},$$

så $A^{-1} + B^{-1}$ är produkt av inverterbara matriser, och alltså inverterbar med invers

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A.$$