Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 171024	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$? (2p)

Lösning:

Gauß-eliminering:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -10 & 8 \\ 0 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

pivotel. in sista kolonnen

Svar: Nej, eftersom $x_1 v_1 + x_2 v_2 = u$ inte är lösbart.

(b) Ta fram standardmatrisen till den linjära avbildning T som uppfyller $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$ och $T(\mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$. (2p)

Lösning:

$$T(e_2) = T(e_2 - e_1 + e_1) = T(e_2 - e_1) + T(e_1) =$$

$$= 2e_1 + e_2 + e_2 - e_1 = e_1 + 2e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Svar: Standardmatrisen är $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Låt E vara enhetskuben vars kanter är enhetsvektorerna i $\mathbf{R}^3$. Vilken volym har bilden av E under avbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$? (2p)

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = -22 + 7 = -15$$

$$\begin{pmatrix} R_2 \mapsto R_2 + R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 + 3R_1 \end{pmatrix}$$

Svar: Volymen av $T(E)$ är $|\det A| = 15$.

Var god vänd!

(d) En 2×2-matrix A har egenvärdena -1 och 1 med egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Diagonalisera A och räckna ut A^8. (3p)

Lösning:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2+1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Diagonalisering av A är $A = PDP^{-1}$ där P, D, P^{-1} är som ovan.

$$D^8 = \begin{bmatrix} (-1)^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{bmatrix} = I, \quad A^8 = PD^8P^{-1} = PP^{-1} = I$$

Svar: ....

(e) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lösning: Gauß-eliminering ger

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ som radred. trappstegsformen

x_3 fri

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ är bas för Col A (eller: Col $A = \mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2\}$ bas)

Nul A: allmän lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ är $x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas till Nul A

Svar: ....

(f) Gör en LU-faktorisering av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Gauß-elim. $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - \frac{1}{2}R_1]{} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U$ trappstegsmatris

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ är elementär matris som definierar inversen av radoperationen från A till U

Svar: $A = LU$ $\quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Uppgift 2

(a) Om $\{\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n\}$ är en bas, så kan vi skriva varje vektor v som linjärkombination

$$v = c_1 \mathbb{b}_1 + \dots + c_n \mathbb{b}_n.$$

Koefficienterna $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ är unika och heter koordinaterna för v relativt $\{\mathbb{b}_1, \dots, \mathbb{b}_n\}$.

(b) $$v = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c) Basbytematrisen är

$$\underset{\mathbb{E}\leftarrow\mathbb{B}}{P} = \left[[\mathbb{b}_1]_{\mathbb{E}} \ [\mathbb{b}_2]_{\mathbb{E}} \ [\mathbb{b}_3]_{\mathbb{E}} \right] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(d) $$\underset{\mathbb{B}\leftarrow\mathbb{E}}{P} = \underset{\mathbb{E}\leftarrow\mathbb{B}}{P}^{-1}$$

Beräkning av inversen:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 \longmapsto R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \longmapsto R_3 - \frac{1}{2}R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_3 \longmapsto R_3 + 2R_2 \\ R_1 \longmapsto \frac{1}{2}R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad R_1 \longmapsto R_1 - R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_1 \longmapsto R_1 - 2R_3 \\ R_2 \longmapsto R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{dvs. } \underset{\mathbb{B}\leftarrow\mathbb{E}}{P} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Uppgift 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Egenvärdena till A är lösningar till den karakteristiska ekvationen $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{utveckling} \\ \text{efter 2:a} \\ \text{kolonn}\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} + & \boxed{-} & + \\ - & \boxed{+} & - \\ + & \boxed{-} & + \end{array}$$

$$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-3^2\right) =$$

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda+3)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda) \underline{\underline{=0}}$$

Egenvärdena är $\lambda=-2$ (mult. 2) och $\lambda=4$ (enkelt).

(b) Egenrummet till $\lambda=-2$: lös $(A+2I)x = \mathbb{0}$

$$A+2I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ med radred. trappstegsform } \begin{array}{c} \quad\;\; x_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dvs: $x_1=0$
$x_3=0$
x_2 fri
t.ex. $x_2=1$

Så: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är egenvektor och spänner upp egenrummet.

Egenvektorer till $\lambda=4$: lös $(A-4I)\cdot x = \mathbb{0}$

$$A-4I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{trappstegsform}} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{c} \qquad\quad x_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}}_{\text{radred. trappstegsform}}$$

Lösning: $x_1 - x_3 = 0$
$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$
x_3 fri, t.ex. $x_3 = 2$

Så: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är egenvektor och spänner upp egenrummet till $\lambda=4$.

(c) Nej, A är inte diagonaliserbar eftersom dimensionen av egenrummet till $\lambda=-2$ är mindre än λ:s multiplicitet.

Uppgift 4

(a) Vi använder Gram-Schmidtprocessen.

$v_1 \cdot v_1 = 3, \quad v_1 \cdot v_2 = 1-2-5 = -6$

$$v_2 - \underset{(\mathrm{proj}_{v_1} v_2)}{\underset{\parallel}{\hat{v}_2}} = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

Genom att normera får vi ON-basen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) $$\hat{u} := \mathrm{proj}_{\mathrm{Span}\{v_1, v_2\}} u = \frac{u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1+3+5}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2 \\ 3+0 \\ -3-2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Avståndet är $|u - \hat{u}|$

$$|u - \hat{u}| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T \right| = 3.$$

Uppgift 5

(a) Bilderna av basvektorer i $\mathbb{B}$ är

$T(1) = 0 + t = t$

$T(t) = 1 + t^2$

$T(t^2) = 2t + t^3$

Alltså: $[T]_{\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{B}} = \left[[T(b_1)]_{\mathbb{C}} \ [T(b_2)]_{\mathbb{C}} \ [T(b_3)]_{\mathbb{C}} \right] =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $[T(q(t))]_{\mathbb{C}} = [T]_{\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{B}} [q(t)]_{\mathbb{B}} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Uppgift 6

(a) falskt.

Motexempel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A + B = I$

$\det I = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \det A + \det B.$

(b) sant: $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där A är en 2×3-matris.

T är injektiv $\iff$ $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$ som har dim. 0.

Enligt Rang-Satsen gäller:

$\dim \operatorname{Nul} A = 3 - \operatorname{rank} A \geq 3 - 2 = 1.$ Motsats

Eller: I trappstegsformen för A finns det åtminst. en kolonn som inte är pivotkolonn $\rightsquigarrow$ det finns en fri variabel $\rightsquigarrow$ $\operatorname{Nul} A$ är större än $\{\mathbf{0}\}$.

(c) Falskt. T.ex. $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

u är inte linjärkomb. av v och w, men u, v, w är linjärt beroende eftersom

$$0 \cdot u + 2 \cdot v - 1 \cdot w = \mathbb{0}.$$

Uppgift 7

(a) $A = [a_1 \cdots a_n]$, $\text{Col}(A) = \{\text{linjärkomb. av } a_1, \dots, a_n\}$

$= \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

Vi bevisar att de tre villkoren för ett underrum uppfylls av Col A:

(i) $\mathbb{0} \in \text{Col } A$ eftersom $\mathbb{0} = 0 \cdot a_1 + \cdots + 0 \cdot a_n$

(ii) $u = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$, $v = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n$ är i Col A.

Då: $u + v = (x_1 + y_1) a_1 + \cdots + (x_n + y_n) a_n$ ligger i Col A.
Så $u + v$ ligger i Col A om u, v gör det.

(c) $u = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$, $c \in \mathbb{R}$
$cu = (cx_1) a_1 + \cdots + (cx_n) a_n \in \text{Col } A$
Så cu ligger i Col A för alla $c \in \mathbb{R}$.

(b) Vi vill visa att $\{v_1, \dots, v_p\}$ är linjärt oberoende. Det räcker eftersom $\{v_1, \dots, v_p\}$ alltid spänner upp $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

Vi vill visa att $x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p = \mathbb{0}$ bara har den triviala lösningen $x_1 = \cdots = x_p = 0$
För varje $j = 1, \dots, p$ beräknar vi inre prod. med v_j: $0 + \cdots + x_j \underbrace{v_j \cdot v_j}_{\neq 0 \ (v_j \neq \mathbb{0})} + \cdots + 0 = \mathbb{0} \cdot v_j = 0$

$\Longrightarrow x_j = 0$ klart!