MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista
Datum: 171219 kl. 14.00 - 18.00
Telefonvakt: Felix Held
6792

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Orsola Tommasi

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4-t & 6 \end{bmatrix}.$$
   (a) Definiera vad som menas med kolonnrummet till en matris. (1p)
   (b) Vad ska t ha för värde för att $\operatorname{rank} A < 4$? (2p)
   (c) För detta värde på t, bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till A. (3p)

3. Låt M vara matrisen
$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Egenvärdena till M är -2 och 4. Bestäm alla egenvektorer till M. (2p)
   (b) Vad menas med en ortogonalt diagonaliserbar matris? (1p)
   (c) Är M ortogonalt diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera M ortogonalt. (3p)

4. Låt $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
   (a) En linjär avbildning T avbildar punkterna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ till punkterna $[0\ 0\ 0]^T$, $[-5\ -2\ -4]^T$, $[2\ 1\ 2]^T$ och $[0\ 0\ 1]^T$ (i den ordningen). Hitta T:s standardmatris. (3p)
   (b) Punkterna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ spänner tillsammans upp en parallelepiped. Hur många gånger större eller mindre blir parallepipeds volym när T verkar på den? (2p)
   (c) En annan avbildning avbildar $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ på dessa punkter istället: $[1\ 0\ 0]^T$, $[2\ 1\ 0]^T$, $[1\ -1\ 1]^T$ och $[3\ 0\ 0]^T$. Är avbildningen linjär? (1p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt V vara vektorrummet av alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och U vara mängden av alla elementer i V som uppfyller $f(0) + f(1) = 0$. Visa att U är ett underrum av V. (3p)

   (b) Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) - 9x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 8x_2(t) \end{aligned}$$

   där $x_1(0) = -5$ och $x_2(0) = 3$. (3p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

   (a) Om A och B är $n \times n$-matriser, så är $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (2p)

   (b) Alla diagonaliserbara matrisen är inverterbara. (2p)

   (c) Det finns ingen 3×5-matris A sådan att $\dim(\operatorname{Nul} A) = \operatorname{rank} A$. (2p)

7. (a) Bevisa att mängen av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om $p > n$. (3p)

   (b) Om A är en inverterbar matris, bevisa att $(A^{-1})^{-1} = A$ och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (3p)

7(a): se Sats 1.9 i boken

Lycka till!
Orsola Tommasi

7(b): se Sats 2.6 i boken.

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 171219	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt beroende eller oberoende? (2p)

Lösning:

Vi vill veta om $c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0}$ har en icke-trivial lösning.

Systemets koefficientmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 + 3R_3]{R_1 \mapsto R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & c_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c_3 fri variabel: det finns icke-triv. lösningar

Svar: $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är linjärt beroende (3p)

(b) Beräkna inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{R_1 \mapsto R_1 - R_3;} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 5R_3]{R_1 \mapsto R_1 - 2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

För vilka högerled $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik, inga, respektive oändligt många lösningar? (2p)

Lösning:

Gauß-eliminering

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & b_1 \\ 6 & 0 & -6 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \mapsto R_2 - 3R_3]{R_1 \mapsto R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & -3 & -3 & b_2 - 3b_3 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b_3 \\ 0 & -1 & -1 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & -3 & -3 & b_2 - 3b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - 3R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & b_3 \\ 0 & -1 & -1 & b_1 - 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 3b_1 + 3b_3 \end{array}\right] \end{array}$$

lösbart om och endast om $b_2 - 3b_1 + 3b_3 = 0$

i så fall: x_3 är fri var

Svar: Om $b_2 - 3b_1 + 3b_3 \neq 0$ har systemet inga lösningar; för $b_2 - 3b_1 + 3b_3 = 0$ finns det oändligt många lösningar. Lösningen är aldrig unik.

Var god vänd!

(d) En 2×2-matrix A har egenvärdena -2 och -1 med egenvektorer $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Bestäm A. (3p)

Lösning:

A är diagonaliserbar: $A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

och $P = \begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{3\cdot 2 - 5\cdot 1}\begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -1\\-10 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7 & 3\\-10 & 4\end{bmatrix}$$

Svar: $A = \begin{bmatrix}-7 & 3\\-10 & 4\end{bmatrix}$

(e) Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ i basen $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Vi vill hitta c_1 och c_2 så att $c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -2\\-1 & 0 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\0 & 2 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -3\\0 & 1 & 1/2\end{array}\right]$$

Svar: Koordinaterna är $c_1 = -3$ och $c_2 = \frac{1}{2}$.

(f) Ge ett exempel på en 2×2-matris A som är ortogonal, dvs $A^T A = I$. Matrisen ska inte vara diagonal. (2p)

Lösning:

$A = [a_1 \ a_2]$ där $\{a_1, a_2\}$ är en ON-bas till $\mathbb{R}^2$

T. ex. $a_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ger $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ som är en ON-matris.

Svar: $A = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

(2)

(a) Kolonnrummet till en matris A är mängden av alla linjärkombinationen av A:s kolonner.
Dvs: för $A = [a_1 \; .. \; a_n]$ är kolonnrummet
$\text{Col } A = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$.

(b) rank A definieras som dim (Col A).

Gauß-eliminering:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4-t & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \mapsto R_4 - 3R_3]{R_1 \mapsto R_1 - 2R_3,\; R_2 \mapsto R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4-t & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4-t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \mapsto R_4 - R_2]{R_3 \mapsto R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3-t & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-t & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$3 - t = 0 \Leftrightarrow t = 3$

Om $t \neq 3$: rank $A = 4$

Om $t = 3$: rank $A = 3 < 4$ eftersom

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & x_3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} * & * & & * \end{array} \end{array}$$

är en trappstegsform för A.

(c) Kol. 1, 2, 4 är pivotkolonner, så

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

är en bas till Col A.

Radred. trappstegsformen för A är

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$ allmän lösning till $A\mathbf{x} = 0$ är

$$\mathbf{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ så $$\begin{bmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ bildar en bas för Nul A.

$x_1 + \frac{1}{4} x_3 = 0$
$x_2 + \frac{1}{4} x_3 = 0$
$x_4 = 0$, x_3 fri

③

(a) Egenvektorer till $\lambda_1 = -2$ är lösningar, $x \neq 0$ till $Mx = -2x$, dvs $(M+2I)x = 0$

$$M+2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

x_2, x_3 fri

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{bmatrix}$$

Så: $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ spänner upp egenrummet till $\lambda_1 = -2$

Egenvektorer till $\lambda_2 = 4$:

$$M-4I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 - 2x_3 = 0$

x_3 fri

$x = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ alla egenvektorer till $\lambda_2 = 4$ är multipla av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) M är ortogonalt diagonaliserbar om $M = PDP^T$ där D är diagonal och P är en ON-matris.

(c) M är ortogonalt diagonaliserbar eftersom A är symmetrisk (dvs $M = M^T$).

Kolonnerna av P måste bilda en ON-bas av egenvektorer till M

$\lambda_1 = -2$: GS-processen: $b_1 = v_1$

$v_1 \cdot v_1 = 4 + 1 = 5$, $v_1 \cdot v_2 = 2 + 0 + 0 = 2$

$$b_2 = v_2 - \frac{b_1 \cdot b_1}{b_1 \cdot v_2} b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

längd: $1 + 4 + 25 = 30$

$\lambda_2 = 4: \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{b}_3| = \sqrt{1+4+1} = 6$

Alltså: $M = PDP^T$ där

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(4)

(a) Standardmatrisen är $[T(\mathbf{e}_1) \; T(\mathbf{e}_2) \; T(\mathbf{e}_3)]$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \mathbf{d} + 2\mathbf{c} \Longrightarrow T(\mathbf{e}_1) = T(\mathbf{d}) + 2T(\mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{e}_1 = \mathbf{b} + 2\mathbf{c} + \mathbf{d} \Longrightarrow T(\mathbf{e}_2) = T(\mathbf{b}) + 2T(\mathbf{c}) + T(\mathbf{d}) =$$

$$= \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{c} \Longrightarrow T(\mathbf{e}_3) = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen är $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Volymen blir multiplicerad med $|\det A|$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 0 - (+1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$= (2 \cdot 4 - 5 \cdot 2) - 0 = -2$$

Dvs volymen blir 2 gånger större.

(c) Avbildningen kan inte vara linjär eftersom $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ avbildas i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$.

⑤

(a) Vi vill visa att U uppfyller de tre villkor för att vara ett underrum.

(i) $\mathbb{0} \in U$ eftersom nollfunktionen $\mathbb{0}(t)=0$ uppfyller $\mathbb{0}(0)+\mathbb{0}(1)=0+0=0$.

(ii) om f_1, f_2 ligger i U, så uppfyller f_1+f_2

$$(f_1+f_2)(0)+(f_1+f_2)(1) = f_1(0)+f_2(0)+f_1(1)+f_2(1)$$

$$= \underbrace{f_1(0)+f_1(1)}_{\substack{= \\ 0 \\ (f_1 \in U)}} + \underbrace{f_2(0)+f_2(1)}_{\substack{= \\ 0 \\ (f_2 \in U)}} = 0$$

Alltså ligger f_1+f_2 i U.

(iii) om $f \in U$ och $c \in \mathbb{R}$, så gäller

$$(cf)(0)+(cf)(1) = cf(0)+cf(1) = c(\underbrace{f(0)+f(1)}_{\substack{= \\ 0 \\ (f \in U)}})$$

$$= c \cdot 0 = 0.$$

Alltså ligger cf i U.

Härmed är U ett underrum.

(b) Systemet kan skrivas som $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$

där $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Egenvärden till A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -9 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda-5 = (\lambda+1)(\lambda-5)$$

Så: $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 5$ är egenvärdena.

Egenvektorer:

$\lambda_1 = -1$:

$A + I = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvekto

$\lambda_2 = 5$:

$A - 5I = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor.

Allmän lösning till systemet är

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$x(0) = \begin{bmatrix} -3c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ på grund av begynnelsevillkoret

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{array}$$

Alltså: lösningen är

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{5t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-t} - 2e^{5t} \\ e^{-t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

6 (a) <u>falskt</u>

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$ som är bara lika med $A^2 + 2AB + B^2$ om $AB = BA$.

Men $AB \neq BA$ för den mesta A, B

(t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$)

(b) <u>Falskt</u>. T.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar men inte inverterbar.

(c) Enligt Sats 2.14 gäller: rank A + dim Nul $A = 5$ (= antalet av kolonner). Da $5 \neq 2$ rank A kan rank (A) och dim (Nul A) inte vara lika med varandra

SANT