**MATEMATIK** — **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**

Chalmers tekniska högskola — Datum: 171024 kl. 14.00–18.00

Tentamen — Telefonvakt: Oskar Allerbo 5325

# MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Orsola Tommasi, 031 772 1048

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1**. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

**2**. (a) Vad menas med koordinaterna för en vektor $\mathbf{v}$ relativt en bas $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$? (1p)

(b) Låt basen $\mathbf{B}$ bildas av vektorerna $[2\ 1\ 1]^T$, $[-2\ \ -2\ 1]^T$ och $[2\ 0\ 4]^T$. Om en vektor $\mathbf{v}$ har koordinatvektorn $[2\ 0\ \ -1]^T$ relativt basen $\mathbf{B}$, vad är $\mathbf{v}$? (Dvs, ange $\mathbf{v}$:s koordinater i standardbasen). (1p)

(c) Ange basbytematrisen från basen $\mathbf{B}$ till standardbasen. (1p)

(d) Ange basbytematrisen från standardbasen till basen $\mathbf{B}$. (3p)

**3**. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till $A$. (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till $A$. (2p)

(c) Är $A$ diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera $A$. (Du behöver inte räckna ut $P^{-1}$). (2p)

**4**. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm en ortonormal bas för $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

(c) Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ till $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (2p)

**Var god vänd!**

## Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**5**. Låt den linjära avbildningen $T: \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3$ definieras av $T(p(t)) = p'(t) + t\,p(t)$.

(a) Räkna ut matrisen för $T$ relativt baserna $\mathbf{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathbf{C} = \{1, t, t^2, t^3\}$. (4p)

(b) Räkna ut $[T(q(t))]_{\mathbf{C}}$ där $q(t)$ är en vektor i $\mathbf{P}_2$ med koordinatvektor $[\mathbf{q}(t)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2p)

**6**. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om $A$ och $B$ är $n \times n$-matriser, så är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. (2p)

(b) Det finns inga injektiva linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$. (2p)

(c) Om tre vektorerna $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är linjärt beroende, så är $\mathbf{u}$ en linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. (2p)

**7**. (a) Bevisa att kolonnrummet till en matris utgör ett underrum. (3p)

(b) Bevisa att om mängden $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ är en ortogonal mängd av vektorer där ingen av dem är nollvektorn, så utgör mängden en bas för $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. (3p)

Lycka till!
Orsola Tommasi

| Anonym kod | MVE275 Linjär algebra AT 171024 | sid.nummer 1 | Poäng |
|---|---|---|---|

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$? (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(b) Ta fram standardmatrisen till den linjära avbildning $T$ som uppfyller $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$ och $T(\mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$. (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Låt $E$ vara enhetskuben vars kanter är enhetsvektorerna i $\mathbf{R}^3$. Vilken volym har bilden av $E$ under avbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$? (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

**Var god vänd!**

(d) En $2 \times 2$-matrix $A$ har egenvärdena $-1$ och $1$ med egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Diagonalisera $A$ och räckna ut $A^8$. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(e) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** ..................................................................

(f) Gör en LU-faktorisering av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

. **Lösning:**

**Svar:** ..................................................................