MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**

Chalmers tekniska högskola Datum: 171219 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen Telefonvakt: Felix Held

6792

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Orsola Tommasi

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4-t & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med kolonnrummet till en matris. (1p)

(b) Vad ska t ha för värde för att $\operatorname{rank} A < 4$? (2p)

(c) För detta värde på t, bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till A. (3p)

3. Låt M vara matrisen

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Egenvärdena till M är -2 och 4. Bestäm alla egenvektorer till M. (2p)

(b) Vad menas med en ortogonalt diagonaliserbar matris? (1p)

(c) Är M ortogonalt diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera M ortogonalt. (3p)

4. Låt $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(a) En linjär avbildning T avbildar punkterna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ till punkterna $[0\ 0\ 0]^T$, $[-5\ -2\ -4]^T$, $[2\ 1\ 2]^T$ och $[0\ 0\ 1]^T$ (i den ordningen). Hitta T:s standardmatris. (3p)

(b) Punkterna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ spänner tillsammans upp en parallelepiped. Hur många gånger större eller mindre blir parallepipedens volym när T verkar på den? (2p)

(c) En annan avbildning avbildar $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$ på dessa punkter istället: $[1\ 0\ 0]^T$, $[2\ 1\ 0]^T$, $[1\ -1\ 1]^T$ och $[3\ 0\ 0]^T$. Är avbildningen linjär? (1p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt V vara vektorrummet av alla funktioner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och U vara mängden av alla element i V som uppfyller $f(0) + f(1) = 0$. Visa att U är ett underrum av V. (3p)

(b) Lös systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) - 9x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 8x_2(t) \end{aligned}$$

där $x_1(0) = -5$ och $x_2(0) = 3$. (3p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, så är $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (2p)

(b) Alla diagonaliserbara matriser är inverterbara. (2p)

(c) Det finns ingen 3×5-matris A sådan att $\dim(\operatorname{Nul} A) = \operatorname{rank} A$. (2p)

7. (a) Bevisa att mängen av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om $p > n$. (3p)

(b) Om A är en inverterbar matris, bevisa att $(A^{-1})^{-1} = A$ och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (3p)

Lycka till!
Orsola Tommasi

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 171219	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorerna $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt beroende eller oberoende? (2p)

Lösning:

Svar: .... (3p)

(b) Beräkna inversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

För vilka högerled $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik, inga, respektive oändligt många lösningar? (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) En 2×2-matrix A har egenvärdena -2 och -1 med egenvektorer $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm A. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm koordinaterna för vektorn $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i basen $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Ge ett exempel på en 2×2-matris A som är ortogonal, dvs $A^T A = I$. Matrisen ska inte vara diagonal. (2p)

Lösning:

Svar: ....