MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 180827 kl. 14.00–18.00
Tentamen | Telefonvakt: Carl Lundholm
6792

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2017 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Orsola Tommasi. Rättare: Julia Brandes, 031 772 5367

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3/2 & -5 \\ 4 & 14 & 28 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (3p)

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet till A och ange rank A. (3p)

3. Låt $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$.

(a) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum. (1p)

(b) Bestäm en ortonormal bas för Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. (3p)

(c) Definiera vad som menas med det ortogonala komplementet till ett underrum W. (1p)

(d) Vilken dimension har $W^{\perp}$, där W är samma som i uppgift (b)? (1p)

4. Låt

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till C. (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till C. (2p)

(c) Är C diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera C. (Du får inte räkna ut P^{-1}). (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Visa att polynomen $p_1(t) = 1 - t + t^2$, $p_2(t) = 1 - 2t^2$ och $p_3(t) = t\,(1 - 2t)$ bildar en bas till $\mathbf{P}_2$, det vill säga vektorrummet av alla polynom av högst grad två. (2p)

(b) Ta fram matrisen till avbildningen $T(p(t)) = p(2t) - p'(t)$ i basen ovan. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Det finns en inverterbar matris A som uppfyller $\det(2A) = 8\det(A)$. (2p)

(b) Det finns inga injektiva avbildningar från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^4$. (2p)

(c) Alla diagonaliserbara matriser är inverterbara. (2p)

7. (a) Bevisa att nollrummet till en matris utgör ett underrum. (3p)

(b) Bevisa att om mängden $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ innehåller nollvektorn, så är mängden linjärt beroende. (3p)

Lycka till!
Orsola Tommasi

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 180827	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorn $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ 11 \end{bmatrix}$ en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$? (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen (3p)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ta fram standardmatrisen till den linjära avbildningen T som uppfyller $T(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = 3\mathbf{e_2}$ och $T(\mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} - 6\mathbf{e_1}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt A, B vara kända matriser som dessutom är inverterbara. Räkna ut X, Y och Z i termer av A och B, om (3p)

$$\begin{bmatrix} X & I \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Antag att alla matriser har dimensioner sådana att blockmatriserna kan multipliceras ihop.

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna determinanten det A, där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(f) Ge exempel på matriser A och B sådana att $AB = 0$ men $A \neq 0$, $B \neq 0$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionel)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)
linear combination	linjär kombination

linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)