MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 200107 kl. 14.00–18.00

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Julia Brandes.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Definiera vad som menas med kolonnrummet till en matris. (1p)

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

och bestäm baser för $\operatorname{Nul} A$ och $\operatorname{Col} A$. (4p)

(c) Låt B vara en 5×8 matris. Vad är det minsta värdet $\dim \operatorname{Nul} B$ kan vara? Motivera ditt svar. (1p)

3. Låt

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

och sätt $W = \operatorname{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. Vektorerna $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ utgör alltså en bas till W.

(a) Vad är $\dim W^\perp$? Ingen räkning krävs, motivera ditt svar ur frågeställningen! (1p)

(b) Bestäm en bas till $W^\perp$. (2p)

(c) Skriv $\mathbf{v}$ som en summa $\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{v}} + \mathbf{v}^\perp$, där $\widehat{\mathbf{v}} \in W$ and $\mathbf{v}^\perp \in W^\perp$. (3p)

4. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling längs planet W som spänns upp av vektorerna

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och låt A vara den tillhörige standardmatrisen.

(a) Beräkna $W^\perp$. (2p)

(b) Genom att tolka T geometriskt, ange A:s egenvärden och de tillhöriga egenrum. (2p)
Obs: ingen räkning nödvändig!

(c) Skriv upp en diagonalisering av A. (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Vi betraktar differentialekvationen

$$x''(t) - 3x'(t) - 4x(t) = 0,$$

som är en differentialekvation av andra ordningen.

(a) Genom att införa en hjälpvariabel $v(t) = x'(t)$, visa att differentialekvationen ovan är äkvivalent med systemet av förstagradsdifferentialekvationer som ges av (1p)

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= 3v(t) + 4x(t). \end{aligned}$$

(b) Hitta den allmänna lösningen till systemet i del (a). (2p)

(c) Rita fasdiagrammet. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så måste du även illustrera varför (t.ex. med ett exempel som motsäger påståendet).

(a) Om A är en $n \times n$ matris med n olika egenvärden, så är A inverterbar. (2p)

(b) Låt A vara en $m \times n$ matris med $n \geq m$. Då är ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid lösbar. (2p)

(c) Det gäller att $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. (2p)

7. (a) Låt A vara en $n \times n$ matrix och λ ett egenvärde till A. Bevisa att egenrummet av alla egenvektorer till λ utgör ett underrum. (3p)

(b) Bevisa Pytagoras sats: Om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonala gäller att $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$. (3p)

Lycka till!
Julia Brandes

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 200107	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Låt (2p)

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hitta en ortogonalbas för W.

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna koordinatvektorn av $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, där (2p)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange den symmetriska matrisen som tillhör kvadratiska formen (2p)

$$Q(\mathbf{x}) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - x_2^2.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Beräkna avståndet av punkten $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ från linjen som går genom origo och $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & u & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

För vilka värden av u är A inverterbar?

Lösning:

Svar: ....

(f) Invertera matrisen (3p)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....