(1.1–1.9) LÖSNING AV LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM

Vi börjar med ett exempel

$$\begin{cases} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

EKVATIONSSYSTEM — systemets KOEFFICIENTMATRIS — UTÖKADE MATRIS (totalmatris)

3 ekvationer
3 okända

3×3-matris

3×4-matris

ytterligare kolonn

SÄTT ATT LÖSA: <u>GAUSSELIMINERING</u>

Man får: · byta plats på ekvationer
· multiplicera ekv. med tal ($\neq 0$)
· mult. ekv. med tal och lägga till en annan ekv.

utan att ändra lösningar

$\rightsquigarrow$ elementära radoperationer (på utökade matris)

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -8 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

vill ha koeff. $\neq 0$ för x_1 i 1a ekv.

(nästa: eliminera x_1 från den sista ekv.)

$$\xrightarrow{R_2 \mapsto \frac{1}{2}\cdot R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Nu kan vi eliminera x_3 från R_2 och R_1 och x_2 från R_1:

$$\xrightarrow[R_1 \mapsto R_1 - R_2]{R_2 \mapsto R_2 + 4R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 92 \\ 0 & 1 & 0 & 52 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Motsvarande ekv. system:

$$\begin{cases} x_1 = 92 \\ x_2 = 52 \\ x_3 = 12 \end{cases}$$

färdigt!

ANMÄRKNINGAR:

- all information om ekvationssystemet innehålls i utökade koefficientmatris. (Vi får arbeta direkt med den.)
- Om vi använder elementära radoperationer på den utökade matrisen B för ett linj. ekv.syst., får vi en (ny) matris $\tilde{B}$. Då är ekvationssystemet som hör till $\tilde{B}$ <u>ekvivalent</u> till första ekvationssystemet (det, som hör till B). Dvs: båda ekvationssystemer har samma lösningsmängd.

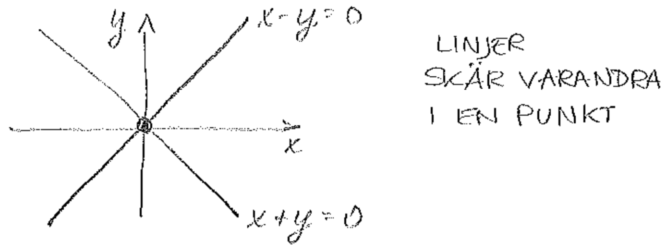
EXISTENS AV LÖSNINGAR

Ett system är <u>lösbart</u> ("consistent") om det finns åtminstone en lösning.

<u>Tre möjligheter:</u>

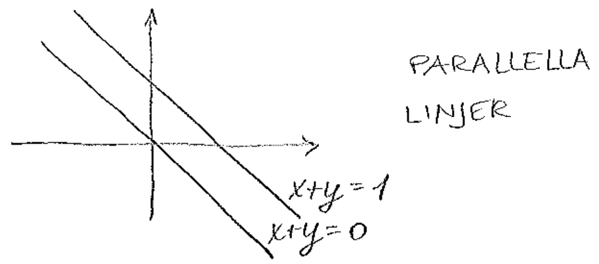
① exakt en lösning

t. ex. $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$



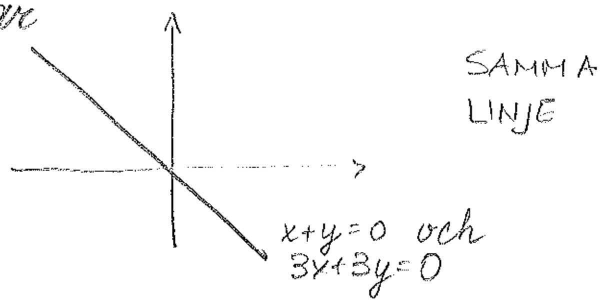
② ingen lösning

t. ex. $\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=1 \end{cases}$



③ oändligt många lösningar

t. ex. $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$



två okänder: linje i planet

tre okänder: plan i rummet

Samma fenomenet förekommer oavsett antalet av okänder och ekvationer: alltid tre möjligheter.

Hur vet vi hur många lösningar det finns?

Idé: om matris är "lätt", kan man se direkt om systemet är lösbar / har en unik lösning.
Genom radoperationer blir varje matris "lätt".

1.2. Trappstegsform

T.ex.
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

DEF. En matris M är i <u>trappstegsform</u> (row echelon form) om

(1) eventuella nollrader ligger nedanför alla icke-nollrader

(2) det ledande talet i en icke-nollrad är <u>strikt till höger</u> om $\underbrace{\text{det ledande talet}}_{\text{första talet} \neq 0}$ i raden ovanför.

(Dvs: varje ~~rad~~ icke-nollrad har fler inledande nollor än raderna ovanför).

<u>Pivotelement</u> i en rad är det vänstraste elementet som inte är noll. Kolonnerna där det finns pivotel. kallas <u>pivotkolonner</u>.

(2) betyder: pivotelementet i en rad är till höger om pivotel. i raden ovanför.

<u>Ex.</u> ■ PIVOT, inte noll
$*$ godtyckligt

PIVOTKOLONNER

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nollkolonner finns bara till vänster,
nollrader underst

DEF. En matris är i radreducerad trappstegsform om dessutom:

(3) alla pivotelement är 1

(4) i pivotkolonnerna är alla element 0 med undatag av pivotelement.

Ex.
$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & \boxed{1} & * & \boxed{0} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pivotkolonner

PROP. Varje matris kan överföras till trappstegsform med hjälp av elementära radoperationer.

(Trappstegsform är bra för att räkna ut lösningar).

SATS 1 Varje matris kan överföras till endast en matris i reducerad trappstegsform.

(Red. trappstegsformen för en matris är unik).

Hur utläser vi lösningar från en matris i trappstegsform?

Ex.
$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} & x_2 & & x_4 & x_5 & & \end{array} \end{array}$$

PIVOTKOLONNER $\longleftrightarrow$ BUNDNA VARIABLER

ICKE-PIVOTKOLONNER $\longleftrightarrow$ FRIA VARIABLER

här: x_2, x_4, x_5 fria

svarar mot

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 & (i) \\ -x_3 + x_5 = 1 & (ii) \\ 3x_6 = 6 & (iii) \end{cases}$$

x_2, x_4, x_5 fria

RRED:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccccc} & x_2 & & x_4 & x_5 & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 - x_5 = -1 \\ x_6 = 2 \end{cases}$$

x_2, x_4, x_5 fria

LÖSNING: (börjar underst)

$(i) \Longrightarrow 2x_1 + x_2 + (-1 + x_5) + x_5 = 1 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2 - (-1 + x_5) - x_5) =$

x_2 fri $\qquad = 1 - \frac{x_2}{2} - x_5$

$(ii) \Longrightarrow -x_3 + x_5 = 1 \Longrightarrow x_3 = -1 + x_5$

x_4 fri

x_5 fri

$(iii) \Longrightarrow x_6 = \frac{6}{3} = 2$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \frac{x_2}{2} - x_5 \\ x_2 \text{ fri} \\ x_3 = -1 + x_5 \\ x_5 \text{ fri} \\ x_6 = 2 \end{cases}$$

Alltså: oändligt många lösningar (då: det finns fria var.)

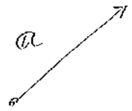
<u>SATS 2</u> Ett linj. ekv.system är lösbart $\iff$ den sista kolonn i utökade matris är <u>inte</u> en pivotkolonn.

Ex. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ & 2 & 1 & 4 \\ & & 0 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow 0 \cdot x_3 = 5x_5$ ingen lösning!

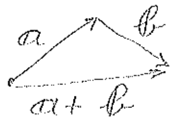
(1.3) VEKTOREKVATIONER

Man kan fatta linj. system bättre med hjälp av vektorer.

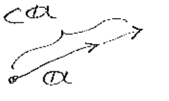
VEKTOR: (kolonnvektor) $a \in \mathbb{R}^n$ är $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ med $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (komponenter)



OPERATIONER: addition, skalär multiplikation



$a, b \in \mathbb{R}^n$



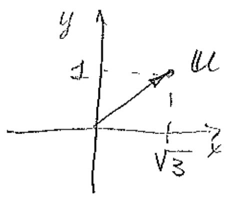
$c \in \mathbb{R}$

<u>DEF.</u> Låt $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$ vara vektorer och $c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}^n$ tal. Linjärkombinationen av $v_1, \dots, v_\ell$ med $c_1, \dots, c_\ell$ som vikter / eller: koefficienter är vektoren $u = c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell$.

<u>Ex.</u> $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$

Varje vektor i $\mathbb{R}^2$ är linjärkomb. av v_1 och v_2:

t.ex.



$u = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$u = \sqrt{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>EN</u>: LINEAR COMBINATION OF $v_1, \dots, v_\ell$ WITH WEIGHTS (or: COEFFICIENTS) $c_1, \dots, c_\ell$

OBS.: $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ godtycklig vektor

b kan skrivas som linjärkomb. av a_1 o a_2

$\iff$ det finns $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ så att gäller $x_1 a_1 + x_2 a_2 = b$

$\iff$ " " " " " $\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} = b_2 \end{cases}$ $\leftarrow$ DET H SYSTEMET ÄR LÖSBART

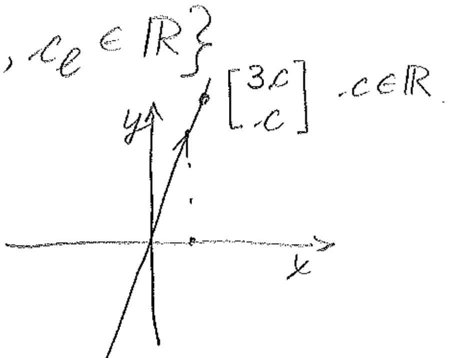
$\iff$ linjärsystemet met utökade matris $[a_1, a_2, b]$ är lösbart.

Allmänt: linjärsystemet i m ekv., n okända har utökade matris $[a_1, \dots, a_n, b]$ med $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$.
Systemet är lösbart $\iff$ b kan skrivas som linearkomb. av $a_1, a_2, \dots, a_n$.

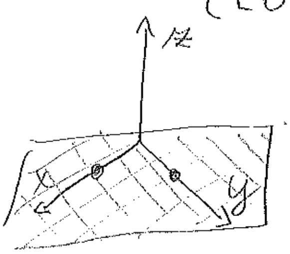
DEF. $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$
Span$\{v_1, \dots, v_\ell\}$ definieras som mängden av alla linjärkombinationer av $v_1, \dots, v_\ell$ i $\mathbb{R}^n$

Span$\{v_1, \dots, v_\ell\} = \{c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell \mid c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{R}\}$

Ex. Span$\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ är en linje:



Ex. Span$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ är xy-planet i $\mathbb{R}^3$



(1.4) Matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Ekvationssystemen skrivas vanligtvis som matrisekv:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \underbrace{[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{x} \\ \text{okänd vektor}}} = A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

[Specialfall av matrismult: $(m \times n$ matris$) \cdot (n \times 1$ matris$)$]

SATS 3. $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ $m \times n$ matris, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

Lösningsmängden av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är samma som lösningsmängden av vektorekv.

$$x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

och stämmer också överens med lösningsmängden av linj. ekv.systemet met utökade matris $[A \vdots \mathbf{b}]$

<u>SATS 4.</u> A $m \times n$ matris

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är lösbar för <u>alla</u> $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ (1)

$\iff$ alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ är linjärkomb. av A:s kolonner (2)

$\iff$ $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ (3)

$\iff$ A kan överföras till en trappstegsmatris med ett pivotelement i varje rad. (4)

Varför är det sista sant?

Matris i trappstegsform: varje icke-nollrad innehåller ett pivotelement.

Alltså: ett pivotelement i varje rad $\iff$ <u>inga</u> nollrader

$$\left[A \,\vdots\, \mathbf{b} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} \blacksquare & * & \cdots & & & * \\ & & \blacksquare & & & * \\ & & & \blacksquare & & * \\ 0 & \cdots & & & 0 & * \end{array}\right]$$

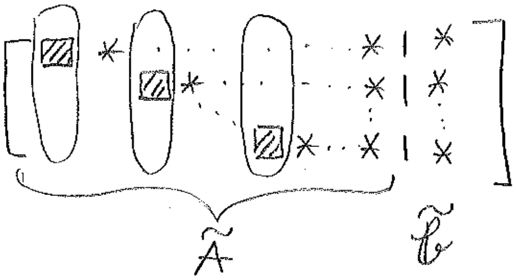
TRAPPSTEGSFORM

det finns $\mathbf{b}$ som gör så att detta tal är $\neq 0$. Då är systemet inte lösbar

BEVIS

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) lätt: det följer av definitionerna

(4) $\Rightarrow$ (1)

$[A \mid b] \xrightarrow[\text{radoper.}]{\text{elementär-}}$ 

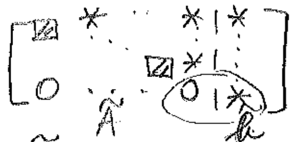
alla pivotkolonner ligger i det första blocket $\tilde{A}$

$\tilde{b}$ (sista kolonnen) är inte en pivotkolonn

SATS 2 $\Rightarrow$ $\tilde{A}x = \tilde{b}$ lösbart $\Rightarrow$ $Ax = b$ lösbart

(1) $\Rightarrow$ (4) Vi antar: $A \rightsquigarrow \tilde{A}$ trappstegmatris med (atm.) en nollrad

vi ska visa:
då finns b, så att $Ax = b$ inte är lösbart.

$[A \mid b] \xrightarrow[\text{radop.}]{\text{elem.}}$ 

Sista rad: $0 = \tilde{b}_m$.

Det finns alltid b sådant att $b_m \neq 0$. Då är $Ax = b$ inte lösbart.

(1.4) Beräkning av Ax: jag antar att det är känt

Viktig: RÄKNEREGLER (Sats 5 i boken)

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(c \cdot x) = c \cdot (Ax)$$

(1.5) Lösningsmängder av linj. ekvationssystem.
Lösningsmängderna av linj. ekv. syst. är mycket viktiga studieobjekter i den LA. De har många speciella egenskaper som är viktiga i flera sammanhang.
Två fall: homogena / icke-homogena system
DEF. Ett linj. ekv. system kallas homogent om det kan skrivas på formen $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$.
NOT. $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ nollvektor

OBS. Ett homogent system $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har alltid atm. en lösning, nämligen $\mathbb{x} = \mathbb{0}$.
$\mathbb{x} = \mathbb{0}$ kallas den triviale lösning.
FRÅGA: Hur vet man om det finns flera lösningar?
$A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har icke-trivial lösning <=> det finns fria variabler

Ex. Vi betraktar det homogena systemet

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

- skriva (*) som vektorekv. och som matrisekv.
- finns det icke-triviala lösningar av (*)?
- vilka är lösningar? Beskriva lösningsmängden.

Lösning Vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_3 \\ -3x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alltså: $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrisform: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Vi använda Gaußeliminationen att beräkna lösningarna:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 + R_1]{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + R_2}$$

vi behöver inte skriva den utökade matrisen
(ell. radoperationerna förändrar inte nollkolonnen)

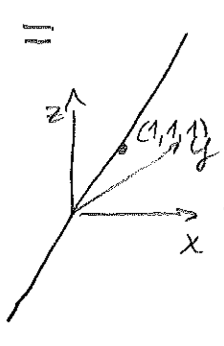
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto -\frac{1}{3} R_2} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \qquad\qquad x_3 \text{ fri} \end{array} \xrightarrow{R_1 \mapsto R_1 + 3R_2} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{rred. trappstegsf.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \implies x_1 = x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \implies x_2 = x_3 \end{cases}$$

Lösning:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d.v.s. lösningsmängden är $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, =
linjen genom $(1,1,1)$ och origo



Ex. Hav

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_3 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

icke-triviala lösningar?

Ja. Det behöver ingen räkning: 3 ekv. i 4 okända.

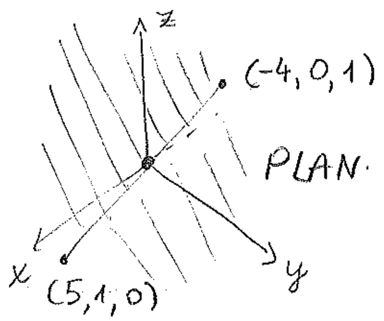
Ex. $x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0$ system med bara en ekv. (definierar ett plan i $\mathbb{R}^3$)

$x_1 = 5x_2 - 4x_3$

x_2, x_3 fria

Lösning: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Parametrisk vektorform av planetsekvationen:



$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$

Lösningsmängd: $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Allmänt: för icke-homogena system, lösningen kan skrivas som en <u>partikulärlösning</u> + den almänna lösningen till det homogena systemet.

Ex. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ Lös systemet.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

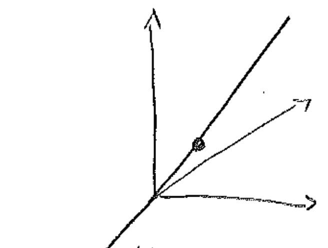
lösbart, x_3 fri

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \Longrightarrow x_1 = 1 - 2(1 + x_3) - 3x_3 = -1 + x_3$

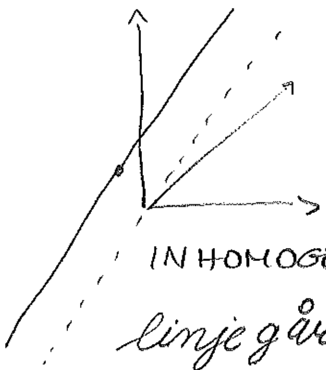
$x_2 - x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 1 + x_3$ SÄTTA I EKV. OVANFÖR

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + x_3 \\ 1 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{partikulärlösning}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{allmän lösn av homog. syst.}}$$

ekv. på en linje i parameterform



HOMOGENT FALL:
lösungsmängden innehåller $\mathbb{0}$
(linje går genom origo)



INHOMOGENT FALL:
linje går inte genom origo längre

(1.6) Tilllämpningar

Vi behändlar bara avsnittet "flöde i nätverk"

Modell för: • trafik i en stad (korsningar, gator)

• elektrisk ström i en krets

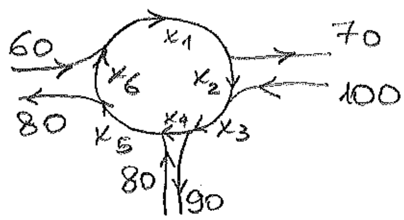
• m.m. (t.ex. i ekonomi)

Ett nätverk består av punkter (kallas: noder) samt riktade bågar mellan vissa par av noderna.

Det finns något flöde i varje båg

FLÖDESBALANS: utflödet = inflödet

T.ex. Rondell:



Obs.

IN UT

$60+80+100 = 80+90+70$

(annars är systemet inte lösbart)

Vad kan vi veta om flöderna inuti rondellen?

$$\begin{cases} x_1 = 70 + x_2 \\ x_2 + 100 = x_3 \\ x_3 = x_4 + 90 \\ x_4 + 80 = x_5 \\ x_5 = x_6 + 80 \\ x_6 + 60 = x_1 \end{cases}$$

Utökade matris:

red. trappstegsform

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -60 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösning: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 60 \\ -10 \\ 90 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

negativt flöde är ej möjligt, så: $x_6 \geq 10$

Lägsta flödet är $(70, 0, 100, 10, 90, 10)$.

TÄNKA PÅ: A 3×3-matris, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

Antag: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning. Finns det någon vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en unik lösning?

T.ex.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

icke-lösbara system har alltid atm. en nollrad i red. trappstegsform av $\underline{A}$

$$[A \mid \mathbf{c}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right]$$

lösbart $\Rightarrow c_3 = 0$

x_3 fri variabel: alltid oändligt många lösningar

(1.7) Linjärt oberoende

Påminna:

homogena system är alltid lösbart: två fall

- den enda lösning är $x = 0$ (trivial lösning)
- det finns icke-triviala lösningar

Nu: titta på vektorform av linj. ekv. systemet.

DEF. Vi säger att vektorerna $v_1, \ldots, v_\ell$ i $\mathbb{R}^n$ är <u>linjärt oberoende</u> om enda lösningen till vektorekv.

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_\ell v_\ell = \mathbb{O}$$

är den triviala lösningen $x_1 = x_2 = \cdots = x_\ell = 0$.

Om det inte är linjärt oberoende, dvs om det finns $c_1, c_2, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}$ som inte alla är 0, s.a.

$$c_1 v_1 + \cdots + c_\ell v_\ell = \mathbb{O},$$

så säger vi att $v_1, \ldots, v_\ell$ är <u>linjärt beroende</u>.

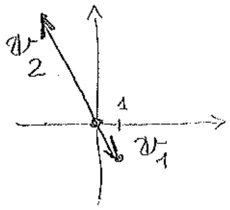
(EXEMPEL: jfr. nästa sida)

Exempel

(1) $v_1 \neq \mathbb{O}$ är linjärt oberoende: $c_1 v_1 = \mathbb{O} \implies c_1 = 0$
(TITTA PÅ EN KOMPONENT $\neq 0$ AV v_1)

$v_1 = \mathbb{O}$ är linj. beroende: t.ex. $1 \cdot v_1 = \mathbb{O}$.

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$



} ligger på den samma linje!

är linj. beroende, eftersom
$2v_1 + v_2 = \mathbb{O}$.

(3) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt oberoende eftersom om

$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ så måste $c_1 = c_2 = 0$.

Allmänt för två vektorer:

linj. beroende om de ligger på samma linje

linj. oberoende om spannet är ett plan.

(4) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är linj. beroende:

$v_1 - v_2 - v_3 = \mathbb{O}$

<u>OBS.</u> $A\mathbf{x} = \mathbb{O} \iff x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = \mathbb{O}$ så $a_1, \ldots, a_n$ är linj. oberoende om $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ bara har den triviala lösningen.

<u>Ex.</u> $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & +6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

red. trappstegsform

det finns en fria variabel

Lösningar: $x_1 = 2x_2$, $x_2 \in \mathbb{R}$, t.ex. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ (jfr. ovan)