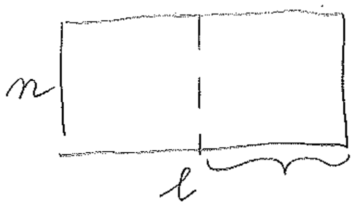
<u>SATS 9</u> Om mängden $M = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ in $\mathbb{R}^n$ innehåller nollvektoren, så är M linj. beroende.
<u>Bevis:</u> Vi kan arrangera ordningen, så att $v_\ell = \mathbb{O}$.
Då är $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_{\ell-1} + 1 \cdot v_\ell = \mathbb{O}$ en icke-trivial linjär relation mellan $v_1, v_2, \dots, v_\ell$.

<u>SATS 8</u> En mängd $M = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ i $\mathbb{R}^n$ som innehåller $\ell > n$ vektorer är alltid linj. beroende.

Bevis: $A = [v_1, \dots, v_\ell]$ $n \times \ell$-matris

$A x = \mathbb{O}$ antalet ℓ av variablen är större än antalet n av ekv.:



det finns alltid fria variabler, alltså: alltid icke-triv. lösningar. □

SATS 7. $v_1, \dots, v_\ell$ är linjär beroende $\iff$
en av $v_1, \dots, v_\ell$ kan skrivas som linjärkomb. av de andra.

[$\iff$ det finns j så att $v_j \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_\ell\}$
Span: mängden av linearkombinationerna]

Bevisidé: titta på fallet $c_1 \neq 0$.

$\Leftarrow$ klar

$\Rightarrow$ Vi antar att $v_1, \dots, v_\ell$ är linj. beroende, dvs.

(*) $c_1 v_1 + \dots + c_\ell v_\ell = 0$ $\quad c_1, \dots, c_\ell$ inte alla 0.

Då är $c_j \neq 0$ för atminstone ett $j = 1, \dots, \ell$

Vi delar (*) med c_j och hitta:

$$\frac{c_1}{c_j} v_1 + \dots + v_j + \dots + \frac{c_\ell}{c_j} v_\ell = 0 \qquad \text{(subtrahera...)}$$

dvs $$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j} v_{j+1} - \dots - \frac{c_\ell}{c_j} v_\ell$$

Det betyder att v_j är linjärkomb. av de andra vektorerna.

T.ex. Två vektorer v_1, v_2 är linj beroende om och endast om de är parallella.

v_1, v_2 är linj. beroende,

två fall
- v_1 är linjärkomb. av v_2
  Det betyder: $v_1 = c v_2$ med $c \in \mathbb{R}$:
  parallella vektorer ($v_2 = 0$ möjligt)
- $v_2 = c v_1$ också parallella
  (v_1 kan vara 0)

(1.8) Linjära avbildningar

sv		en
FUNKTION	=	FUNCTION
AVBILDNING	=	MAP, MAPPING
TRANSFORMATION	=	TRANSFORMATION
OPERATOR	=	OPERATOR

$x \in \mathbb{R}^n$, A $m \times n$-matris $\rightsquigarrow$ Ax vektor i $\mathbb{R}^m$

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto T(x) := Ax$$

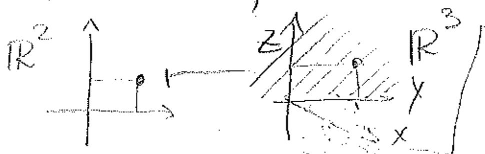
är en avbildning (eller: transformation) från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, som heter matrisavbildnig m.a.p. A.

- Definitionsmängd av T: $\mathbb{R}^n$
- Målmängd: $\mathbb{R}^m$
- Värdemängd (EN: "range") definieras som

$T(\mathbb{R}^n) := \{ T(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \}$ alla vektorer $T(x)$ där $x \in \mathbb{R}^n$

<u>EX.</u> $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad T(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, värdemängd är yz planet.



SAMBAND MELLAN MATRISAVBILDNINGAR O LINJ. EKVATIONSSYSTEM:

SAM EX. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ och låt $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara $T(x) = Ax$

1) Finns det något x så att $T(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$?
I så fall, hur många?

Lös $Ax = b$ där $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ red. trappstegsmatris

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ enda lösning.

2) Ligger $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i värdemängden?

Dvs: finns $\mathbf{x}$ sådant att $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -7 \\ 0 & -3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{icke lösbart}$$

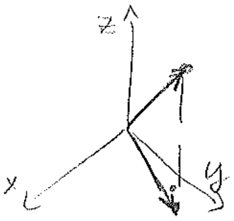
Svar: nej.

Anm. värdemängden är $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$.

Matrisavbildningar med en geom. betydelse:

[FLERA EXEMPEL, ÄVEN MED BILDER, FINNS I BOKEN]

EX. 1 Projektion: t. ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

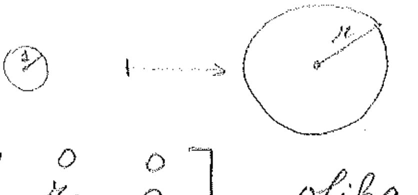


$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

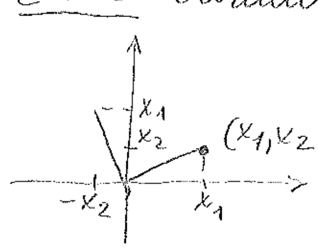
T är projektion på xy-planet.

EX. 2 Dilation/skalning $\quad \mathbf{x} \longmapsto r \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$



$\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ – olika skalning längs axlarna

EX. 3 Rotation t. ex. snurra $90°$ (viktigt: fixpunkt i origo)

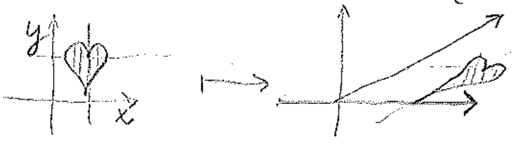


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

EX. 4 Skjuvning (EN: SHEAR TRANSFORMATION)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

övre triangulärmatr. med 1 på diagonalen



SKJUVNINGARNA BEVARAR AREA!

Vi vet: $A(u+v)=Au+Av$, $A(cu)=c(A(u))$ u, v vektorer, $c\in\mathbb{R}$ skalär

DEF. En avbildning $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
kallas linjär om

(1) $T(u+v) = T(u)+T(v)$ och

(2) $T(cu) = c\,T(u)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n,\ c\in\mathbb{R}$

Matrisavbildningarna är alltid linjära.

Ex. Är $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ linjär?

Geom. betydelse:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ translation.

NEJ, T är inte linjär.

T.ex. $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ men för linj. avbildningar gäller:

$T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$.

(ty: $\mathbb{0} = 0\cdot v$ $v\in\mathbb{R}^n \implies T(\mathbb{0}) = 0\cdot T(v) = \mathbb{0}$

Eller: $T\left(2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1+1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

$2T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} x_1+1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1+2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$

INTE SAMMA!

PROP. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om och endast om

(4) $T(cu+dv) = c\,T(u) + d\,T(v)$

för alla vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ o skalär $c, d \in \mathbb{R}$.

PROP. T linjär $\implies T(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$.

Nyttiga för att veta om en viss avbildning är linjär.

(1.9) Matrisen till en linjär avbildning

Hur kan vi få en formel för en linj. avbildning?

Svar: Vi måste veta vad den gör med enhetsvektorerna

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vara en linj. avbildning.

Vi vet att $T\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{=\mathbf{e}_1}\Big) = \begin{bmatrix}3\\-4\\-5\end{bmatrix}$ och $T\Big(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{=\mathbf{e}_2}\Big) = \begin{bmatrix}-13\\0\\17\end{bmatrix}$,

ta fram en formel för vad T gör med $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

Lösning

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) \overset{(4)}{=} x_1 T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= x_1\begin{bmatrix}3\\-4\\-5\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-13\\0\\17\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}3 & -13\\-4 & 0\\-5 & 17\end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

dvs. $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Obs. Det är bara möjligt om vi vet att T är linjär.

SATS 10. $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linjär. Då finns en unik $m \times n$-matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och

$$A = \left[T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \dots, T(\mathbf{e}_n)\right].$$

(kolonnerna av A är värdena av enhetsvektorerna $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ under T)

Matrisen A kallas avbildnings standardmatrisen

Bevis: Samma proceduren som i exemplet: varje vektor är linearkomb. av $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, så

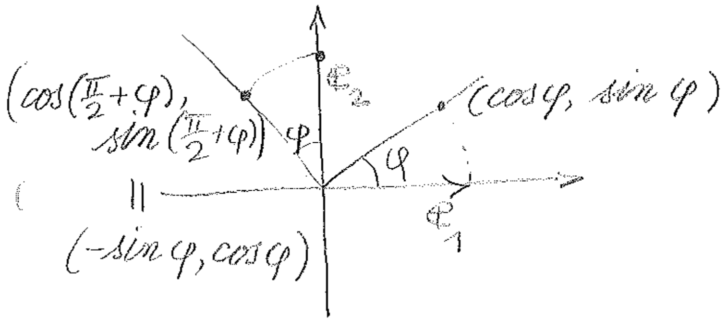
$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right) = x_1 T(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n T(\mathbf{e}_n) = A\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

samma som i motsvarigheten mellan vektorekvation och matrisekv. för linj. ekv.system.

Alltså: Alla linjära avbildningar är matrisavbildning-arna.

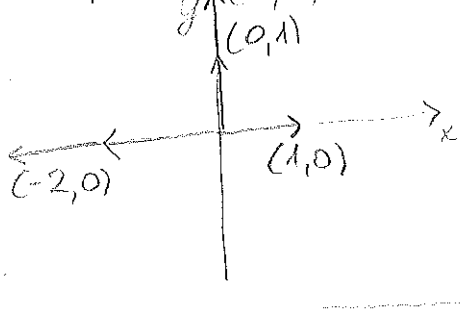
Ex. Beräkna standardmatrisen till rotation med φ grader. (moturs)

$$A = \left[T(e_1), T(e_2) \right]$$



$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Ex. Låt T vara den linj. avbildningen där vi speglar i y-axeln och sedan dubblar längden på vektorn. Ta fram matrisen för T.



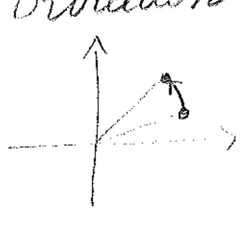
$$T(e_1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

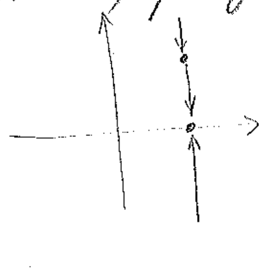
så $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Viktiga egenskaper för avbildningar:

- $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kallas injektive (EN: injective, one-to-one) om det inte finns flera x som hamnar till samma bild, dvs. varje $y \in \mathbb{R}^m$ är bilden av <u>högst</u> <u>en</u> $x \in \mathbb{R}^n$

T. EX. Rotation är injektiv; projektion är inte inj.





EN: surjective, onto

• $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kallas surjektiv om värdemängden stämmer överens med målmängden $\mathbb{R}^m$.
dvs: varje $y \in \mathbb{R}^m$ är bilden av <u>åtminstone</u> en $x \in \mathbb{R}^n$.

T. ex. $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1$ $\quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ surjektiv

$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ inte surjektiv

<u>SATS 11</u> En linj. avbildning T är injektiv om och endast om $T(x) = 0$ bara för $x = 0$
dvs $Ax = 0$ har bara den triviala lösningen.

SAMBAND MED LINJ. EKV.SYSTEM:
T linj. avbildning med standardmatris A

T surjektiv $\iff$ A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^m$
$\iff$ trappstegsformen av A innehåller inga nollrader
(dvs: det finns ett pivotelement i varje rad)

T injektiv $\iff$ A:s kolonner är linjärt oberoende
$\iff$ alla kolonner i trappstegsformen av A är pivotkolonner
(dvs: det finns ett pivotelement i varje kolonn).

$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$ surjektiv, inte injektiv

$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ injektiv, inte surjektiv

Kommentar till Sats 11:

T linjär avbildning med standardmatris A

Om T är linjär måste lösningen till $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ alltid vara unik. Varför räcker till att veta det för $\mathbb{b}=\mathbb{0}$?

$A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ inhomogen

Lösningen: partikulärlösning + allmäna lösningen till $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$.

Om $A\mathbb{x}=\mathbb{b}$ är lösbart, så har det lika många lösningar som $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$. Så vi behöver bara veta att $A\mathbb{x}=\mathbb{0}$ bara har den triv. lösningen.

(2.1) Matrisoperationer

- skalärmultiplikation: med $c\in\mathbb{R}$ $\quad cA=\begin{bmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \vdots & & \\ ca_{m1} & & ca_{mn}\end{bmatrix}$

- addition: $\quad A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$

är definierad om A, B har samma dimensionerna.

RÄKNEREGLER:

$A+B=B+A \qquad s(A+B)=sA+sB$

$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (s+t)A=sA+tA$

$A+\mathbb{0}=A \qquad s(tA)=(st)A$

för alla $m\times n$-matriser A, B, C och skalär s, t.

$\mathbb{0}$: nollmatris

- matrismultiplikation

DEF. A $m\times \underline{n}$-matris, B $\underline{n}\times p$-matris

$AB=A\left[\mathbb{b}_1,\ldots,\mathbb{b}_p\right]=\left[A\mathbb{b}_1,\ldots,A\mathbb{b}_p\right]$

AB är en $m\times p$-matris.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Räkna ut AB

Lösning. $\left.\begin{array}{l} A: \ 2\times 2\text{-matris} \\ B: \ 2\times 3\text{-matris} \end{array}\right\}$ så AB är definierad och är en 2×3-matris (som B)

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 4\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 - 1\cdot 5 \\ 2\cdot 2 + 4\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 20 & 6 & 24 \end{bmatrix}$$

OBS. $A\mathbf{b}_1 = 4\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ osv.

Varje kolonn av AB är linjärkomb. av A:s kolonner.

Tänka på:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^p \arrow[r, "\text{MATRISAVB.}", "\text{MAP. } B"'] \arrow[rr, bend left, "\text{SAMMANSATT AVBILDNING}"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\text{MATRISAVB.}", "\text{MAP. } A"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{x} \longmapsto B\mathbf{x} \longmapsto A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$$

Sammansättningen av linj. avbildningar är alltid linjär och dess standardmatris är precis <u>matrisprodukten</u> av standardmatriserna.

RÄKNEREGLER: för alla $\left\{\begin{array}{ll} A, A' & m\times n\text{-matriser} \\ B, B' & n\times p\text{-matriser och} \\ C & p\times q\text{-matris} \end{array}\right.$ $t\in\mathbb{R}$

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B+B') = AB + AB'$, $(A+A')B = AB + A'B$
- $I_m A = A = A I_n$ $\qquad I_m = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $m\times m$-identitätsmatris
  I_n $n\times n$-identitätsmatris
- $(tA)B = t(AB) = A(tB)$

<u>VARNINGAR:</u>

① $AB \neq BA$ i de mesta fallena! (Själv när båda är definierade)

② $AB = AC$ betyder <u>inte</u> att $B = C$. (Kan vi "dela" med A?)

③ $AB = \mathbb{O}$ kan ske även om $A \neq \mathbb{O}$, $B \neq \mathbb{O}$.

Exempel:

① $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

② ③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

DEF. Potens: $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ faktorer}}$

DEF. Transponatet av en $m \times n$-matris är $n \times m$ matrisen A^T som har A:s rader som kolonner.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

Räkneregler: $(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(tA)^T = tA^T$

$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

<u>Frågestund</u>

Sant/falskt-uppgifter

FALSKT betyder: vi ha ett MOTEXEMPEL

SANT betyder: vi kan föra ett allmänt resonemang som visar att det är sant.

Ⓐ 2.1. <u>15a</u>

Om A o B är 2×2-matriser så är $AB = [a_1 b_1, \ a_2 b_2]$.

<u>FALSKT</u>: a_1 2×1-matris, b_1 2×1-matris: $a_1 b_1$ är inte definierat

medan $AB = [Ab_1 \ \ Ab_2]$ existerar.

Ⓑ Om A är en $n\times n$-matris så gäller $(A^2)^T = (A^T)^2$.

<u>SANT</u>. Bevis: $(A^2)^T \underset{\text{definition}}{=} (A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T \underset{\text{def.}}{=} (A^T)^2$

sats 3d i boken räkneregel för trasponatet $(AB)^T = B^T A^T$

Ⓒ $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ eller $B = 0$

<u>FALSKT</u> Motexempel $[1 \ 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

(2.2) Inversen av en matris.

För reella tal: om $a \neq 0$ finns alltid $a^{-1} = \frac{1}{a}$ s.a. $a \cdot a^{-1} = 1$.

T.ex. $2 \cdot 2^{-1} = 1$

För matriser: vi kan inte dela med en matris.

DEF. En $n \times n$-matris A är inverterbar om det finns en $n \times n$-matris C sådan att $AC = CA = I_n$.

OBS. C är unik, för om det fanns en annan invers B gäller: $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.

Vi kallar inversen A^{-1}.

DEF. Icke-inverterbara (kvadratiska) matriser kallas singulära. (T.ex. $\mathbb{O}$ är singulär).

SATS 4 Låt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Om $ad-bc \neq 0$ är $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Om $ad-bc = 0$ är A singulär.

BEVIS $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -bc+ad \end{bmatrix} = (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Likadant: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Så om $ad-bc \neq 0$ är $A^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Om $ad-bc = 0$ so är A singulär.

Vi antar att A^{-1} existerar:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} =$$

$$= A^{-1} \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = A^{-1} \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$$ så $a = b = c = d = 0$ #

$\mathbb{O}$ är singulär.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$. Vad är A^{-1}?

Svar: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = -1$, så A^{-1} existerar.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

SATS 5 Är A en inverterbar $n \times n$-matris så har ekv. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ den enda lösningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ för alla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

BEVIS • testa lösningen

$$A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b} \quad \text{stämmer}$$

• unik lösning: om $\mathbf{x}$ är en lösning,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \implies \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$A^{-1}(A\mathbf{x}) = \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}\mathbf{x}$$

MEN: beräkningen med Gaußelimineringen är snabbare. (Man behöver färre beräkningar).

Ex. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Lösningen är $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10-2 \\ 16+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 19 \end{bmatrix}$

SATS 6 (a) A inverterbar $\implies A^{-1}$ inverterbar och $(A^{-1})^{-1} = A$

(b) A, B inverterbara $\implies AB$ inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(c) A inverterbar $\implies A^T$ inverterbar och $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Bevis Vi måste testa om formlerna för inversen stämmer.

(a) $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ från def. av A^{-1}.

(b) $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1}B = I$

På samma sätt från andra hållet. Klart!

(c) $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$. Likadant från andra hållet. Klar!

Metod för att räkna ut A^{-1}

DEF. En elementär matris är en som vi får genom att göra en elementär radoperation på identitetsmatrisen I.

Tre typer:

TYP 1: (två rader byter plats med varandra)

t.ex. $n=3$ $\quad R_2 \longleftrightarrow R_3 \qquad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

TYP 2: (multiplikation av en rad med skalär $\neq 0$)

$c \neq 0 \quad R_1 \longmapsto 5R_1 \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

TYP 3: (mult. med skalär och lägg till en andra rad)

$R_3 \longmapsto R_3 - 2R_1 \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$E_1 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad E_2 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad E_3 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - 2x_1 \end{bmatrix}$

På samma sätt: $\quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$E_1 A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{bmatrix}, \quad E_2 A = \begin{bmatrix} 5a & 5b & 5c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad E_3 A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-2a & h-2b & i-2c \end{bmatrix}$

Obs. Om vi gör en radoperation på A, så kan vi skriva resultatet som EA där E är elementära matris som fås genom att göra samma radoperation på I.

ELEMENTÄRA RADOPERATIONER = MATRISMULTIPLIKATION FRÅN VÄNSTER MED ELEM. MATRISER

(Fråga / tänka på: vad gör matrismultiplikation från höger med en elementär matris?)