11/9

Obs. Elementära matriser är alltid inverterbara.
Inversen av E är den elem. matrisen av samma typ som överföra E tillbaka till I

Ex. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$R_3 \mapsto R_3 - 2R_1$ $\quad R_3 \mapsto R_3 + 2R_1$

Test: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2+2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, på samma sätt.

SATS 7 $\quad A$ är inverterbar $\iff A$ kan radreduceras till I.

Samma elementära radop. som förvandlar A till I förvandlar även I till A^{-1}.

Bevisidé

A inverterbar $\implies A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har alltid en unik lösning
[dvs: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ är bijektiv]

$\implies$ trappstegsformen av A har ett pivotelement i varje rad och i varje kolonn

övre triangulär med el. $\neq 0$ på diag. $\implies$ radred. trappstegsformen är I.

Då $A \to E_1 A \rightsquigarrow \cdots \to \underbrace{E_p E_{p-1} \cdots E_1}_{\text{detta måste vara } A^{-1}} A = I$

Metod för att hitta A^{-1}

$[A \mid I] \rightsquigarrow$ radred. trappstegsmatris är $[I \mid A^{-1}]$ (om A är inverterbar)

Anm. Alla inv.bara matriser är produkt av elementära matriser

$E_p \cdots E_1 A = I \implies A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_p^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & -12 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 0 & 11/8 & 3/2 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 & 3/2 & -1/8 \end{array}\right]$$

$R_1 \mapsto R_1 + 4R_2$; sedan $R_1 \mapsto \frac{1}{2} R_1$

trappstegsmatris:
A är inverterbar

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/16 & -1/4 & 3/16 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & -1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 3/8 & 3/2 & -1/8 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -1/16 & -1/4 & 3/16 \\ -3/8 & -1/2 & 1/8 \\ 3/8 & 3/2 & -1/8 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

(2.3) Karakterisering av inverterbara matriser

Sammanfattning.

SATS 8 Följande påståendena är ekvivalenta för en $n \times n$-matris A:

a) A är inverterbar

b) A kan överföras till I genom elem. radoperationer

c) A har n pivotpositioner

d) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bara den triv. lösningen

e) A:s kolonner är linj. oberoende

f) den linj. avbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är injektiv

g) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har åtminstone en lösning för varje $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$

h) A:s kolonner spänner upp $\mathbb{R}^n$

i) $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ är surjektiv

j) det finns en $n \times n$-matris C sådan att $CA = I$

k) " " " " " D " " $AD = I$

l) A^T är inverterbar.

Resonera kring varför.

(a) A inv. bar $\overset{\text{SATS 6 (c)}}{\Longleftrightarrow}$ (l) A^T inv.'bar

$\Updownarrow$ SATS 7

(b) $A \underset{\text{elem.}}{\sim} I$

$\Updownarrow$ (Gaußeliminering; titta på möjliga trappstegsformer som är inte radred.)

(c) A har n pivotelement

A har ett pivotel. i varje rad $\Longleftrightarrow$ A har lika många rader som kolonner $\Longleftrightarrow$ A har ett pivotel. i varje kolonn

SATS 1.4 $\Updownarrow$

(g)

SATS 1.4 $\Updownarrow$

(h)

$\Updownarrow$

(i) $T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

då $T(\mathbb{R}^n) = \text{Span}\{A\text{:s kol.}\}$

$\Updownarrow$

T surjektiv

A har ett pivotel. i varje kolonn

$\Updownarrow$ linj. system: alla var är bundna

(d)

$\Updownarrow$ def. av linj. oberoende

(e)

$\Updownarrow$ SATS 1.11

(f) T är injektiv

(a) A inv'bar $\overset{\text{def.}}{\Longrightarrow}$ $C = A^{-1}$ uppfyller (j)

$D = A^{-1}$ " (k)

(k) $\Rightarrow$ (h) $\quad I = AD$ betyder

$$\text{Span}\{AD\text{:s kolonner}\} \subset \text{Span}\{A\text{:s kolonner}\} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{Span}\{AD\text{:s kolonner}\} = \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$$

Så: $\text{Span}\{A\text{:s kolonner}\} = \mathbb{R}^n$

(j) $\Rightarrow$ (l) $\quad I = CA \underset{\text{EGENSK. AV TRANSP.}}{\Longrightarrow} A^T C^T = I^T = I \underset{\text{som ovan}}{\Longrightarrow}$

$\text{Span}\{A^T\text{:s kolonner}\} = \mathbb{R}^n \Longrightarrow A^T$ inv'bar.

<u>OBS.</u> A, B $n \times n$

$AB = I \Longrightarrow A, B$ inv'bara med $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

DEF. En linj. avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas inverterbar om det finns en linj. avbildning $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sådan att

$T(S(x)) = x$ och $S(T(x)) = x$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.

S kallas inversen av T och skrivs $S = T^{-1}$.

OBS. (precis som för funktioner)

T inverterbar $\iff$ T bijektiv (inj. + surj.)

[därför är $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ där $n=m$]

Ex. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$ inverterbar: karakterisering (c) i Sats 8

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ -5 & 10 & 1 \end{bmatrix}$ singulär: jfr. (e) i Sats 8

(2.4) Uppdelning av matriser. (uppdelning = partition)

Vi vill dela upp matriser i block, t. ex.

Ex. $A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 7 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

där $A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$ $A_{22} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$.

Nyttigt i tillämpningar där vi har stora mängder data (men kanske många 0).

Om B har samma uppdelning som A kan vi addera A och B: $A + B = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{array}\right]$ (blocken har samma storlek för A och B)

Vi kan också multiplicera uppdelade matriser blockvis om uppdelningar för A:s kolonnerna och för B:s rader stämmer överens.

T. ex. $A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 7 \end{array}\right]$ $\quad 2 + 1$ $\quad B = \left[\begin{array}{cc} 0 & -4 \\ 2 & 5 \\ \hline -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2 \\ + \\ 1 \end{array} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}$

$$AB = \left[\begin{array}{c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} \end{array}\right]$$

$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$ $\quad A_{12}B_{12} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} = \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -4 & -10 \end{bmatrix}$

$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \end{bmatrix}$ $\quad A_{22}B_{12} = \begin{bmatrix} -21 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A_{21}B_{11} + A_{22}B_{12} = \begin{bmatrix} -13 & 24 \end{bmatrix}$

Så:
$$AB = \begin{bmatrix} 17 & -7 \\ -4 & -10 \\ -13 & 24 \end{bmatrix}$$

Testa: $17 = 3\cdot 0 + 1\cdot 2 - 5\cdot(-3)$ på vanligt sätt

(Sats 10: inte så viktig: $A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix}$ rader, $B = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & \cdots & K_p \end{bmatrix}$)

Tillämpning: invers av en uppdelad matris

Ex. Anta att $\underset{m\times m}{A}$, $\underset{n\times m}{B}$ och $\underset{n\times n}{C}$ är kända matriser och definiera

$$M = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right] \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{m} & \underbrace{\quad}_{n} \end{array} \end{array}$$

Hur ser inversen till M ut?

Blockvis: vi söker matriser X, Y, Z med

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

Vi behöver:
$$\begin{cases} XA = I \\ YA + ZB = 0 \\ ZC = I \end{cases}$$

så: $X = A^{-1}$, $Z = C^{-1}$,

$$YA = -ZB = -C^{-1}B \implies Y = -C^{-1}BA^{-1}$$

Vi vet nu:
$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

(2.5) Matrisfaktoriseringar

Faktorisering = vi skriver matrisen som produkt.

Användbart vid numeriska beräkningarna.

* Vi ska bara göra LU-faktoriseringen.

PROBLEM: Vi ha en serie ekvationer

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots,\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p$ som vi vill lösa.

Om A är inv.bar: kan beräkna $A^{-1}\mathbf{b}_1, \ldots, A^{-1}\mathbf{b}_p$.

(Men det kräver många beräkningar och funkar inte om det finns oändligt många lösningar).

Annars: radreduktion

$$\left[A \mid \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p\right] \rightsquigarrow \cdots \left[\underbrace{\begin{matrix} \boxtimes & & \\ & \boxtimes & \\ & & \boxtimes \end{matrix}}_{\text{trappstegsformen för } A} \;\middle|\; \tilde{\mathbf{b}}_1 \cdots \tilde{\mathbf{b}}_p\right]$$

13/9.

En annan metod som sparar beräkningar:

faktorisera $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{L}\ \underset{m\times n}{U}$ där:

- L är en nedre triangulär matris med 1:or på diagonalen:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$

- U är <u>en</u> trappstegsformen för A (<u>obs.</u> ej radreducerad trappstegsformen)

ANVÄNDNING: vi vill lösa $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sätt $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ $\quad \begin{cases} \mathbf{y} = U\mathbf{x} \\ L\mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$ lös i två steg!

Ex.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{U}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}},\ \text{lös } A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

(1) lös $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 12 & 1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 - 3R_1 - 12R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -152 \end{array}\right] \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 32 \\ 4 \\ -152 \end{bmatrix}$$

eller:
$$\begin{cases} x_1 = 32 \\ x_2 = 4 \\ 3x_1+12x_2+x_3=-8 \end{cases} \Longrightarrow x_3 = -8-3x_1-12x_2 = $$
$$= -8-96-48 = -152$$

(2) Lös $Ux = y$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 32 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -152 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right] \qquad x = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -15 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Hur hittar vi L och U?

Det funkar bara om vi inte behöver byta plats på rader för att radreducera A. (Inget problem för ett linjärt ekv. system).

METOD: $A \xrightarrow[\text{radoper.}]{\text{elem.}} U$ dvs $E_p \cdots E_1 A = U$

$$\Longrightarrow \quad A = \underbrace{(E_p \cdots E_1)^{-1}}_{L = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}} U$$

Vi kan välja de elem. radop. så att $E_1, \dots, E_p$ är nedre triang. med 1:or på diagonalen.

Konkret: 1) Radreducera A till U

2) Konstruera L så att samma elem. radoper. förvandlar L till I.

Obs. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$ så är $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & +3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - R_1]{R_2 \mapsto R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + 3R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Test: $LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & -5 & 3 & -8 \\ 2 & -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} = A$

(2.8) Underrum av $\mathbb{R}^n$

DEF. Ett underrum (eller: delrum, EN: subspace) i $\mathbb{R}^n$ är en mängd H i $\mathbb{R}^n$ med följande egenskaper:

(1) $\mathbf{0}$ ligger i H

(2) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ligger i H, så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i H

(3) Om $\mathbf{u}$ är i H, så är även $c \cdot \mathbf{u}$ i H för alla skalär c.

Ex: $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$ är ett underrum.

Om $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$ sägs att $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$ genererar / spänner upp H.

Ex. 1 $\emptyset$ är inte ett underrum

inte underrum

Ex. 2 $\{\mathbf{0}\}$ är underrum. $\mathbb{R}^n$ är underrum.

Linjer, plan, etc. genom origo är underrum.

DEF. Kolonnrummet till en $m \times n$-matris A är mängden $\text{Col}\,A$ av alla linjärkomb. av kolonnerna i A.

<u>OBS.</u> $\underbrace{\text{Col}\,A = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}}_{\text{spann av A:s kolonner}} = \underbrace{T(\mathbb{R}^n)}_{\substack{\text{värdemängd} \\ \text{för avb. } T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}}} \subseteq \mathbb{R}^m$

Ex.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ligger $\mathbf{b}$ i $\text{Col}\,A$? Dvs finns det x_1, x_2 s.a. $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$?

$\Longleftrightarrow$ Är $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbart?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & 3 \\ -3 & 7 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \mapsto R_2 - R_3; \\ R_2 \mapsto -R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -7 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 10 & -25 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ja!}$$

EN: null space

DEF. Nollrummet till en $m \times n$-matris A är mängden $\mathrm{Nul}\,A$ av alla $\mathbf{x}$ som är lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

SATS 12. $\mathrm{Nul}\,A$ är ett underrum av $\mathbb{R}^n$.

Bevis.

(1) $\mathbf{0} \in \mathrm{Nul}\,A$ eftersom $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(2). Tag $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Nul}\,A$. Ligger $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i $\mathrm{Nul}\,A$?

$A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. ja

(3) Tag $\mathbf{u} \in \mathrm{Nul}\,A$, $c \in \mathbb{R}$. Ligger $c \cdot \mathbf{u}$ i $\mathrm{Nul}\,A$?

$A(c\mathbf{u}) = c\,A\mathbf{u} = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ja

[Gauß-eliminering $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Nul}\,A$ skrivs som spannet av vissa vektorer]

DEF. En <u>bas</u> för ett underrum H i $\mathbb{R}^n$ är en mängd $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$ av linjärt oberoende vektorer som spänner upp H.

Ex. 1 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

Ex. 2 Motexempel

Är $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix}$ en bas för $\mathbb{R}^3$? Nej.

Är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$? Nej.

Ex. 3a. Hitta en bas för $\mathrm{Nul}\,A$ om $A = \begin{bmatrix} 4 & -12 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Radred. trappstegsformen för A är $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

x_2, x_4, x_5 fria

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3x_2 + x_4 - 2x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ spänner upp Nul A.

De är linjär oberoende (titta på 2:a, 4:e och 5:e komponentor).
Så $\{u_1, u_2, u_3\}$ är en bas för Nul A.

14/9

Ex. 3b: ligger $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i Nul A? Nej! Fel dimension

Ligger $x = [1\ 0\ -1\ 2\ 2]^T$ i Nul A?

$$A x = \begin{bmatrix} 4 & -12 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$ nej.

Ex. 3c Hitta en bas för kolonnrummet av A.

$$A \underset{\text{radop.}}{\overset{\text{elem.}}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

PIVOTKOLONNER är en bas för Col $\tilde{A}$

Påstående: kolonn a_1 och a_3 i A (de som blir pivotkolonner efter radreduktion) bildar en bas för Col A.
Varför? Vi ska visa att alla andra kolonner kan skrivas som linjärkomb. av a_1 och a_3.

T. ex. a_4

$$[A \ \ a_4] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

fria var., sätt till 0

$x_1 = -1$
$x_3 = 2$
$x_2 = x_4 = x_5 = 0$
lösning

ger att $-a_1 + 2a_3 = a_4$ (testa!)
På samma sätt med a_2 och a_5: $a_2 = -3a_1$, $a_5 = 2a_1 - 3a_3$
Alltså spänner a_1 och a_3 upp kolonnrummet. De är också linj. oberoende (eftersom $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är linj. ober.).
Vi drar slutsatsen att $\{a_1, a_3\}$ är bas för Col A.

Allmänt:

SATS 13 Pivotkolonner av A bildar en bas för kolonnrummet.

(2.9) Dimension och rang

Vad ska vi ha baser till? Givet en bas $\{b_1, \dots, b_n\}$ till H och en vektor $x \in H$, så vet vi att det finns $c_1, \dots, c_n$ s.a.

$$x = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n \qquad \text{(eftersom } b_1, \dots, b_n \text{ spänner upp } H\text{)}.$$

Dessa $c_1, \dots, c_n$ kallas koordinater i basen $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Koordinater är unika.

Antag att det inte är unika, dvs

$$x = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n = d_1 b_1 + \cdots + d_n b_n.$$

Så $(c_1 - d_1) b_1 + \cdots + (c_n - d_n) b_n = 0 \implies c_i = d_i$ eftersom $b_1, \dots, b_n$ är linj. oberoende

DEF. $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ (ordnad) bas för underr. H

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ kallas koordinatvektor till x relativt B.

Ex. $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$

- v_1 och v_2 utgör en bas för $\text{Span}\{v_1, v_2\}$.
- ligger u i H? Vad är koordinatvektoren rel. basen B?

Lös $c_1 v_1 + c_2 v_2 = u$.

Men $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2v_1 - v_2$, så $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

OBS. H ser ut som $\mathbb{R}^2$: avbildningen $\begin{matrix} x \longmapsto [x]_B \\ H \longrightarrow \mathbb{R}^2 \end{matrix}$ är inverterbar.

Ex. $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ standardbas för $\mathbb{R}^n$.

Då är $[x]_B = x$ för alla $x \in \mathbb{R}^n$.

DEF. Dimensionen av ett underrum H är antalet vektorer i en bas för H. Undentag: $\dim\{\mathbb{0}\} = 0$.

Notation: $\dim H$

DEF. Rangen (EN: rank) av en matris är

$\operatorname{rang} A := \dim(\operatorname{Col} A)$ dimensionen av kolonnrummet.

SATS 14. För en $m\times n$-matris A gäller att

$\operatorname{rang} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.

Bevisidé

3×5 matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2+3=5$

$\operatorname{rang} A = 2$ antalet pivotkol.

$\dim \operatorname{Nul} A = 3$ antalet fria variabler i ekv. $A\mathbf{x} = \mathbb{0}$

Geometriskt: avbildningen $T: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathbf{x} \longmapsto T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

trycker ihop ett 3-dim. underrum i $\mathbb{R}^5$ till $\mathbb{0}$. Då blir det bara två dimensioner kvar till värdemängden $\operatorname{Col} A$.

OBS. A 3×5-matris $\Longrightarrow$ $\operatorname{rang} A$ kan som mest vara 3. Alltså är $\dim \operatorname{Nul} A$ åtminstone 2 (det måste bli åtminst. 2 fria variabler).

SATS 15 H underrum till $\mathbb{R}^n$ med $\dim H = k$. Då gäller:

(1) om vi har k vektorer $v_1, \dots, v_k$ som är linj. oberoende så utgör de en bas

(2) k vektorer som spänner upp H är en bas.

Anm. Det är känt i fallet $H = \mathbb{R}^n$ $(k=n)$.

$v_1, \dots, v_n$ linj. oberoende $\Longleftrightarrow$ $A = [v_1 \dots v_n]$ är inverterbar

$\Longleftrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$

jfr.: karakterisering av inverterbara matriser (Sats 8)

Begreppen av bas, rang och dimension kan användas för att karakterisera inverterbara matriser.

SATS 8, forts. (jfr. avsnitt 2.3)

A $n \times n$-matris.

Följande är ekvivalenta:

(a) A är inverterbar.

(m) A:s kolonner bildar en bas för $\mathbb{R}^n$

(n) $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$

(o) $\dim \operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$

(p) $\operatorname{rang} A = n$ ← störst möjligt = maximal rang

(q) $\operatorname{Nul} A = \{\mathbb{0}\}$

(r) $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

(3.1) Determinanter

Ytterligare ett kriterium för när en matris är inverterbar.

Ex. $n=2$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot a \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ ac & ad \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \mapsto R_2 - cR_1} \begin{bmatrix} \boxed{a} & b \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$

vi antar $a \neq 0$ (annars: gör rader byta plats)

PIVOT?

Så A är inverterbar $\iff ad-bc \neq 0$.

Vi kallar $ad-bc = \det A$.

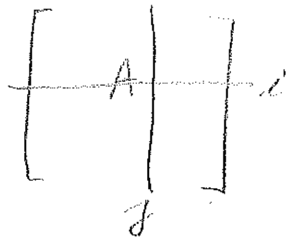
För $n=3$: vi kan beräkna trappstegsformen för en allmän 3×3-matris och hitta en (mer komplicerad) formel

$A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Hur räknas det ut för större matriser?

DEF. A $n\times n$-matris, $1\le i,j\le n$

A_{ij} är $(n-1)\times(n-1)$-matrisen vi får om vi tar bort rad i och kolonn från A:



Vi definierar determinanter för större matriser <u>rekursiv</u>

DEF. $\underbrace{\det A = |A|}_{\text{determinanten av } A} = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}\det A_{1n}$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Ex. utveckling efter första raden

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{0 \;\; 5 \;\; 1} \\ -1 \;\; 3 \;\; 2 \\ 2 \;\; -4 \;\; -3 \end{vmatrix} \end{array} = 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\cdot\big((-1)\cdot(-3) - 2\cdot 2\big) + \big((-1)\cdot(-4) - 2\cdot 3\big) = 5 - 2 = 3.$$

Ex. A nedre triangulär

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 =$$

$$= 3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 3\cdot 4\cdot 1\cdot 8 = 96$$

A nedre triangulär $\Longrightarrow$ $\det A$ är produkt av element på diagonalen