A $n\times n$-matris.

Determinanten av A är ett polynom av grad n i A:s element a_{ij}.

Formeln för determinanten är komplicerad och skrivs som utveckling efter en rad eller efter en kolonn av A.

SATS 1: A $n\times n$-matris, $1\le i,j\le n$

utveckling efter rad i: $\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \dots + (-1)^{i+n} \det A_{in}$.

utveckling efter kolonn j

$$A_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} & \text{rad } i \\ \text{kolonn } j & \end{array}$$

Teckenmönster
$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ heter (i,j)-cofaktorn av A

Ex.
$$\begin{vmatrix} 3 & \boxed{0} & 1 \\ 5 & \boxed{-2} & 7 \\ 1 & \boxed{0} & -3 \end{vmatrix} = -0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

vi får välja en bra rad/kolonn
bra = många nollor

$$= -2(-9-1) = 10.$$

Ex.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 8\cdot 10 = 400$$

Lika idé ger

SATS 2: Om A är triangulär så är det A lika med produkten av alla element på diagonalen.

Ex.
$$\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -7 & -9 & -15 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ utveckling efter A:s nollrad

OBS. det $A = 0$ om A innehåller en nollrad eller en nollkolonn

(3.2) Egenskaper av determinanter

Vad gör radoperationer med det A?

SATS 3 A $n \times n$-matris

$$A \underset{\substack{\text{elem.}\\ \text{radop.}}}{\rightsquigarrow} B$$

(1) om vi får B genom att byta plats på två rader, så är $\det B = -\det A$

(2) om vi får B genom att multiplicera en rad med $c \in \mathbb{R}$, så är $\det B = c \det A$

(3) om vi får B genom att lägga en multipel av en rad till en annan rad, så är $\det B = \det A$.

Ex.
$$\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad -2 \quad -6 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \\ -1 \quad 2 \quad 8 \quad 5 \\ 3 \quad -1 \quad -2 \quad 3 \end{vmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} = 2 \begin{vmatrix} \overset{\text{PIVOT}}{\boxed{1}} & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 & 0 \\ 0 & \overset{\text{PIVOT}}{\boxed{1}} & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \underset{\text{PIVOT}}{\boxed{-3}} & -5 \end{vmatrix} \updownarrow = -2 \cdot \underset{\substack{\text{övre triangulär}\\ \text{(trappstegsform)}}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = -2 \cdot 1 \cdot 1 (-3) \cdot 1 = +6$$

OBS. Om det finns en 0 på diag. i trappstegsformen så är det $A = 0$. Men en 0 på diagonalen betyder också rang $A < n$ (det finns $< n$ pivotkolonner), så A är inte inverterbar.

SATS 4: A inverterbar $\iff$ det $A \neq 0$.
(och alla andra karakteriseringar i Sats 2.8)

SATS 5 $\det A = \det A^T$

(Varför är det sant? Jamför utvecklingen av det A efter 1:a raden med utvecklingen efter 1:a kolonnen)

OBS. Sats 4 betyder att vi kan göra elementära kolonnoperationer istället för el. radoperationer.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & \underset{\uparrow}{1} & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \underset{\begin{bmatrix} K_3 \mapsto K_3 - K_1 \\ K_4 \mapsto \textcircled{-\frac{1}{2}} \cdot K_4 \end{bmatrix}}{=} -2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

denna kolonn är lätt: vi subtraherar den från de andra kolonnerna

$K_1 \mapsto K_1 - K_2$
$K_3 \mapsto K_3 - 2K_2$
$K_4 \mapsto K_4 - K_2$
alla: typ (3)

(mål: skapa så många nollor som möjligt!)

$$\underset{\substack{\text{utveckl.}\\ \text{efter 1:a raden}}}{=} -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & 1 \\ 2 & \boxed{0} & 0 \\ 3 & \boxed{1} & 1 \\ + & - & + \end{vmatrix} = +(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Från Sats 3 och Sats 4 följer:

SATS 6 $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Obs. $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ i den mesta fällen!

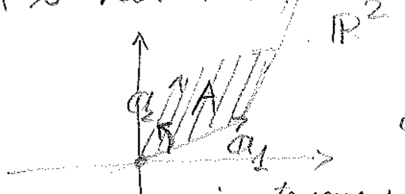
(3.3) Vi hoppar över 177-179: Cramer's regel och formel för A^{-1}

Geometrisk tolkning av determinant

SATS 9

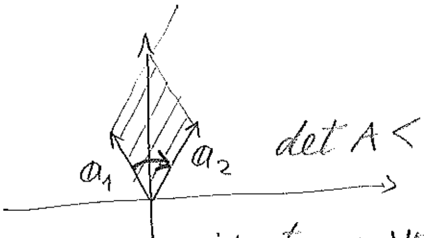
Om A är en 2×2-matris så är

|det A| = arean av parallelogrammet som ges av A:s kolonner.



$\det A > 0$

vi roterar MOTURS från a_1 till a_2



$\det A < 0$

vi roterar MEDURS från a_1 till a_2.

Om A är en 3×3-matris så är

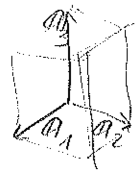
$|\det A|$ = volymen av parallelepipeden som ges av A:s kolonner

eventuell:

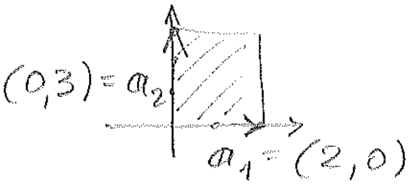
det $A > 0$ $\quad a_1, a_2, a_3$ är ett högersystem

(jfr: högerhandsregeln)

det $A < 0$ $\quad a_1, a_2, a_3$ är ett vänstersystem



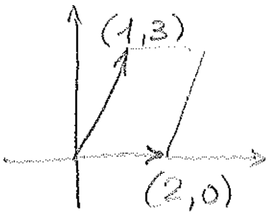
Ex.



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

det $A = 6$
arean $= 6$

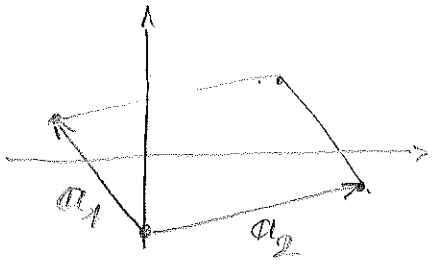
eller:



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

det $A = 6$
arean $= 6$

Ex. Hitta arean av parallelogrammet med hörn i $(0,-2), (6,-1), (-3,1), (3,2)$.



$a_1 = (-3,1) - (0,-2) = (-3,3)$

$a_2 = (6,-1) - (0,-2) = (6,1)$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 18 = -21$$

arean är 21.

SATS 10 (utvidgad)

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax$ och låt S vara ett område i planet med ändlig area. Då är

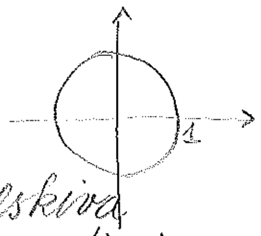
(arean av $T(S)$) = $|\det A| \cdot$ (arean av S)

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$: ersätt area med volym.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dilation med faktor två

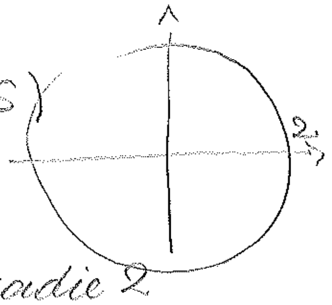
$|\det A| = 4$

S:



cirkelskiva
med radie 1

T(S)



radie 2

$$\left.\begin{array}{l} \text{arean av } S = 1^2 \cdot \pi = \pi \\ \text{arean av } T(S) = 2^2 \cdot \pi = 4\pi \end{array}\right\} \text{ stämmer}$$

Obs. Denna formel används när vi byter variabel i dubbel- eller trippelintegraler.

20/9

(4.1) Vektorrum

Vi kan beräkna många saker i $\mathbb{R}^n$.

Högre abstraktionsnivå: det finns rum med lika struktur som $\mathbb{R}^n$. För dem kan vi använda lika tekniker som i $\mathbb{R}^n$ så att förstå dem bättre.

Vilka egenskaper är det vi behöver i ett "vektorrum"?

DEF. Ett vektorrum är en mängd V som innehåller objekt som vi kallar vektorer.

I mängden finns två operationer:

addition av två vektorer och multiplikation av vektor med skalär, som uppfyller följande regler:

(för alla u, v och w i V och $c, d \in \mathbb{R}$

1) $u+v$ ligger i V
2) $u+v = v+u$
3) $(u+v)+w = u+(v+w)$
4) det finns en vektor $0 \in V$ s.a. $u+0 = u$
5) för varje $u \in V$ finns en $-u \in V$ sådan att $u+(-u) = 0$.

6) $c \cdot u \in V$

7) $c(u+v) = cu + cv$

8) $(c+d)u = cu + du$

9) $c(du) = (cd)u$

10) $1 \cdot u = u$

Det ser teoretiskt ut men har också många praktiska tillämpningar i t.ex. systemteknik (och allm. i alla fall där man arbetar med rum av funktioner) och i signalbehandeling (avsn. 4.8).

Med hjälp av (1)-(10) kan vi härleda ytterligare egenskaper, som t.ex.

11) $0 \cdot u = \mathbf{0}$

12) $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

13) $-u = (-1) \cdot u$

Ex. Bevis av 11:

$$0 \cdot u = (0+0) \cdot u \overset{(8)}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u$$

$0 \cdot u \in V$ (enligt (6)) så enligt (5) finns det en vektor $-0 \cdot u$ s.a $(0 \cdot u) + (-0 \cdot u) = \mathbf{0}$.

Vi lägger den till på båda sidor:

$$\mathbf{0} \underset{(5)}{=} (0 \cdot u) + (-0 \cdot u) = 0 \cdot u + \underbrace{0 \cdot u + (-0 \cdot u)}_{= \mathbf{0} \text{ enl. } (5)}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{0} = 0 \cdot u + \mathbf{0} \overset{(4)}{=} 0 \cdot u$$

Exempel på vektorrum:

EX. 1 $\mathbb{R}^n$ och alla underrum i $\mathbb{R}^n$.

EX. 2 $\mathbb{S}$ = mängden av alla följder

$$\{y_k\} = \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}$$

uppstår när en signal samplas vid diskreta tidpunkter.

$$\{y_k\} + \{z_k\} = \{y_k + z_k\}, \qquad c \cdot \{y_k\} = \{c y_k\}$$

<u>EX. 3</u> $\mathbb{P}_n = \{\text{alla polynomer av grad} \leq n\} =$
$= \{p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\}.$

med vanliga addition och skalärmult.:

om $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ så är

$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n$

och $c \cdot p(t) = ca_0 + (ca_1)t + \cdots + (ca_n)t^n$ för $c \in \mathbb{R}$.

Vad är $\mathbf{0}$?

Vad är $-p(t)$?

<u>EX. 4</u> $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$c(f(x)) = cf(x)$

$\mathbf{0}$ är funktionen $f(x) \equiv 0$.

<u>Underrum</u> av ett vektorrum definieras som i kap. 1
(3 villkor: $\mathbf{0} \in H$, $u + v \in H$, $c \cdot u \in H$ för alla $u, v \in H$ och $c \in \mathbb{R}$).

Ex. V som i ex. 4. Är $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ ett underrum i V?

(1) $f(x) \equiv 0$ uppfyller $f(0) = 0$.

(2) tag f och g i U, dvs. $f(0) = g(0) = 0$. Ligger $f+g$ i U?

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0.$ Ja!

(3) tag f i U, dvs. $f(0) = 0$, och $c \in \mathbb{R}$. Ligger cf i U?

$(cf)(0) = c\,f(0) = c \cdot 0 = 0.$ Ja!

Så U är underrum.

Ex. Är $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$ ett underrum av V?

Nej: $f(x) \equiv 0$ uppfyller $f(0) = 0 \neq 1$, så $\mathbf{0} \notin U$.

(4.2)

Nollrum, kolonnrum: samma def. som förut.

DEF. V, W vektorrum

En linjär avbildning $T: V \longrightarrow W$ är en funktion som uppfyller

(1) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ och

(2) $T(cu) = c\,T(u)$

för alla $u, v \in V$ och $c \in \mathbb{R}$.

Ex. $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots)\}$ är en vektorrum

$T: \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ är linjär

$S: \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots)$ är inte linjär

$S(x+y) = S(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots) = ((x_1+y_1)^2, (x_2+y_2)^2, \dots)$

$S(x) + S(y) = (x_1^2+y_1^2, x_2^2+y_2^2, \dots)$ inte samma!

Ex. $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kontinuerligt deriverbar}\}$

$W = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kontinuerlig}\}$

$T(f) = f'$ är en linjär avbildning $V \longrightarrow W$.

$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = T(f) + T(g)$

$T(cf) = (cf)' = cf' = c\,T(f)$

DEF. $T: V \longrightarrow W$ linjär

Kärnan/nollrummet av T är — EN: kernel, null space

$\ker T = \mathrm{Nul}(T) := \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}\}$.

Värderummet av T är

$\mathrm{im}\, T = T(V) = \{w \in W \mid w = T(v) \text{ för en } v \in V\}$

(åtminst. en v)

OBS. $\ker T$ och $\mathrm{im}\, T$ är underrum av V, resp. W.

Om $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ och $T(x) = Ax$ är

$\ker T = \mathrm{Nul}\, A$ och $\mathrm{im}\, T = \mathrm{Col}\, A$.

T. ex. $T(f) = f'$ ker $T = \{$konstanta funktioner$\}$

im $T = \{$kontinuerliga funkt.$\}$

så: T är surjektiv men inte injektiv.

(4.3)

Linjärt oberoende, spann och baser definieras likadant som förut.

DEF. $S \subset V$ delmängden

- Span $S = \{$linjärkomb. $c_1 v_1 + \cdots + c_\ell v_\ell$ med $v_1, \dots, v_\ell \in V\}$
- S är linj. oberoende om för alla $v_1, \dots, v_n \in S$, vektorekv. $c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = \mathbf{0}$ bara har den triv. lösning $c_1 = \cdots = c_n = 0$.
- S är en baser till V om S är linj. oberoende och spänner upp V.

Ex. $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$ ligger båda i $\mathbb{P}_1$. Är de linj. oberoende?

Ja: $\{1, t\}$ är en bas för $\mathbb{P}_1$.

$p_1, p_2, p_3(t) = 2 - t$ är linjärt beroende.

Ex. $f_1(x) = \cos(x)$ och $f_2(x) = \sin x$ är linj. oberoende i $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) = 0$ för alla x

$x = 0$ $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \implies c_2 = 0$

$g_1(x) = \cos(x)\sin(x)$ och $g_2(x) = \sin(2x)$ är linjärt beroende.

Hur kan vi konstruera en bas för V?

SATS 5. $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ i V, $H = \text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

(a) Om någon vektor i S — säg v_1 — är en linjärkomb. av de andra, så spänner resten av dem fortfarande upp H.

(b) Om $H \neq \{0\}$, så är någon delmängd $B \subset S$ en bas för H.

21/9

Vi vet att (b) är sant i fallet $V = \mathbb{R}^n$:

$a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$, definiera matrisen $A = [a_1, \dots, a_p]$.

$\text{Span}\{a_1, \dots, a_p\} = \text{Col } A$ kolonnrum

Pivotkolonnerna av A (dvs kolonnerna som förvandlas i pivotkolonnerna av trappstegsformen) utgör en bas av A. Så finns det en bas som är en delmängd av $S = \{a_1, \dots, a_p\}$.

(4.4) Koordinatsystem

Vi ska visa att om V är av dim. n, dvs om V har en bas med n vektorer, så beter sig V som $\mathbb{R}^n$.

SATS 7. Låt $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ vara en bas för V. Tag $x \in V$. Då finns unika koordinater $c_1, \dots, c_n$ så att

$$x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n.$$

(Samma bevis som för $V \in \mathbb{R}^n$)

Def. $x \in V$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ bas av V

Koordinatvektor relativt $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

OBS. Koordinatavbildning

$x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ är en bijektiv linj. avbildning $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

inj. och surjektiv; inverterbar

Def. En bijektiv linjär avbildning kallas isomorfism.
Vi säger också att V och $\mathbb{R}^n$ är isomorfa.

Ex. $\mathbb{P}_1 = \{\text{polynom av grad} \leq 1\}$ har en bas $\mathcal{B} = \{1, t\}$.

T.ex. koordinatvektor till $p(t) = 5-2t$ är

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Så $\mathbb{P}_1$ beter sig som $\mathbb{R}^2$. (De är isomorfa).

Vi kan välja olika baser:

Ex. $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 = x \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & -6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$c_1 = 3, \ c_2 = -2 \qquad x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Matrisen $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ skickar $\mathcal{B}$-koordinaterna för en vektor till dess koordinater i standardbasen.

$P_{\mathcal{B}} \cdot [x_{\mathcal{B}}] = x$ $\qquad$ $P_{\mathcal{B}}$ kallas basbytematris från $\mathcal{B}$ till standardbasen

Varför är den bra? Vi kan invertera $P_{\mathcal{B}}$ och få

$$[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} x.$$

Ex. $p_1 = 1 + 2t^2$, $p_2 = 4 + t + 5t^2$, $p_3 = 3 + 2t$
$v_1 = (1,0,2)$ $\quad v_2 = (4,1,5)$ $\quad v_3 = (3,2,0)$

p_1, p_2, p_3 linj. oberoende $\iff x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0$ har bara den triv. lösn.

$\iff [x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ " " " " "

$\underset{\text{KOORDINATAVB. ÄR LINJÄR}}{\overset{\text{KOORDINATAVB. ÄR BIJEKTIV}}{\iff}} x_1 [p_1]_{\mathcal{B}} + x_2 [p_2]_{\mathcal{B}} + x_3 [p_3]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ " " " "

$\iff x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \mathbf{0}$ ……. $\iff v_1, v_2, v_3$ linj. oberoende.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

linj. beroende $p_3 = -5p_1 + 2p_2$

Ex. $p_1 = 1+t$, $p_2 = 1-t$ bas för $\mathbb{P}_1$.

Hitta koordinater för $2-t = p_3$

Metod 1. Vi kan lösa $c_1(1+t)+c_2(1-t) = 2-t$ i $\mathbb{P}_1$:

jämför koefficienter och hitta

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$ red. trappstegsformen $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right]$

eller: sätt in $t=-1$, resp. $t=1$ i ekv. och hitta

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2(-2) = 3 \\ c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$ $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{3}{2}$

testa: $\frac{1}{2}(1+t) + \frac{3}{2}(1-t) = 2-t$.

(så koordinater stämmer)

Metod 2. Överför i $\mathbb{R}^2$ genom $p \mapsto [p]_{\{1,t\}}$.

Hitta koord. till $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ relativt basen

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

Lös $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$ (jfr. ovan) eller

$$[p_3]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right]_{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

(4.5) Dimension

Sats 9 Om V har en bas med n vektorer, så är varje mängd i V som har fler än n vektorer linjärt beroende.

Idé: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ bas till V, $V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ koordinatavbildning.

$w_1, \dots, w_{n+1}$ i V har koordinatvektorer

$a_1, \dots, a_{n+1}$ som är linjärt beroende:

$$x_1 a_1 + \dots + x_{n+1} a_{n+1} = 0 \iff \underbrace{A}_{n \times (n+1)} x = 0$$

: det finns fria var.

SATS 10. Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, och en bas $\mathcal{B}_2$ med m vektorer, så är $m=n$.

Bevis: Eftersom $\mathcal{B}_1$ är en bas och $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ är linjärt oberoende, så är $m \leq n$ enligt Sats 9.

Byt roller: $n \leq m$. Alltså: $m=n$.

Def. Om V spänns upp av en ändlig mängd, så kallas antalet vektorerna i en bas dimensionen av V.

$$\boxed{\dim V = \text{antalet vekt. i en bas}} .$$

Annars säger vi att V är oändligt dimensionell.

Ex. $\dim \mathbb{P}_n = n+1$ med bas $b_1 = 1,\ b_2 = t, \dots,\ b_{n+1} = t^n$.

Ex. Hitta dim. av underrummet H och en bas.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} p-2q \\ -p \\ 3p-7q \\ p+q \end{bmatrix} : p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} p-2q \\ -p \\ 3p-7q \\ p+q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linj. oberoende: klart

$\dim H = 2$, $\{b_1, b_2\}$ där $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$, är en bas.

SATS 11. H underrum till ett ändligtdim. vektorrum V. Då kan varje linj. oberoende mängd i H utvidgas (om nödvändigt) till en bas till H. Dessutom gäller: $\dim H \leq \dim V$.

Bevis av detta använder Sats 9

$v_1, \dots, v_k \in H$ linj. ober.

Är $\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = H$?

→ JA: $\{v_1, \dots, v_k\}$ är bas

→ NEJ: tag v_{k+1} i $H \setminus \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$

sätt $k := k+1$