13/1

SATS 10. Om ett vektorrum V har en bas $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, och en bas $\mathcal{B}_2$ med m vektorer, så är $m = n$.

Bevis: Eftersom $\mathcal{B}_1$ är en bas och $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ är linjärt oberoende, så är $m \leq n$ enligt Sats 9.

Byt roller: $n \leq m$. Alltså: $m = n$.

Def. Om V spänns upp av en ändlig mängd, så kallas antalet vektorerna i en bas dimensionen av V.

$$\boxed{\dim V = \text{antalet vekt. i en bas}}\ .$$

Annars säger vi att V är oändligt dimensionell.

Ex. $\dim \mathbb{P}_n = n+1$ med bas $b_1 = 1,\ b_2 = t, \dots,\ b_{n+1} = t^n$.

Ex. Hitta dim. av underrummet H och en bas.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} p-2q \\ -p \\ 3p-7q \\ p+q \end{bmatrix} : p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} p-2q \\ -p \\ 3p-7q \\ p+q \end{bmatrix} = p\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linj. oberoende: klart

$\dim H = 2$, $\{b_1, b_2\}$ där $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$, är en bas.

2/10 SATS 11. H underrum till ett ändligtdim. vektorrum V. Då kan varje linj. oberoende mängd i H utvidgas (om nödvändigt) till en bas till H. Dessutom gäller: $\dim H \leq \dim V$.

Bevis av detta använder Sats 9 och Sats 5.

$v_1, \dots, v_k \in H$ linj. ober.

Är $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = H$?

JA: $\{v_1, \dots, v_k\}$ är bas

NEJ: tag v_{k+1} i $H \setminus \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$
sätt $k := k+1$

SATS 12. $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ bas till vektorrummet V.
Varje mängd av n vektorer som är linj. oberoende är en bas till V.
Varje mängd av n vektorer som spänner upp V är en bas.

(4.6) Rang

Def. A $m\times n$-matris.
Radrummet till A är rummet av alla linjärkombinationer av A:s rader:

$$\text{Row } A = \text{Span}\{A\text{:s rader}\} = \text{Col } A^T \subset \mathbb{R}^n.$$

SATS 13. Om vi får B genom att utföra elem. radoperationer på en matris A, så har A och B samma radrum.
Så om B är på trappstegsform så är alla rader i B som är icke-nollrader en bas för Row A.

$A \xrightarrow[\text{radop.}]{\text{elem.}} B \implies$ B:s rader är linj. komb. av A:s rader $\implies$ Row B $\subset$ Row A

$B \xrightarrow[\text{radop.}]{\text{inversa av elem.}} A \implies$ A:s rader är linj. komb. av B:s rader $\implies$ Row A $\subset$ Row B

är igen elementära

Ex. Hitta bas för radrummet och kolonnrummet till

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -7 & 3 \\ 6 & -7 & -7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red.}}_{\text{trappstegsform}} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -7 & 9/2 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow u \\ \leftarrow v \\ \text{nollrad} \end{array}$$

pivotkol. (de två första kolonnerna i A) ; pivot kol (de två första kolonnerna i den reducerade matrisen)

$\{u=(1,0,-7,9/2),\ v=(0,1,-5,3)\}$ är bas till Row A

$\left\{a_1=\begin{bmatrix}2\\-4\\6\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}-3\\7\\7\end{bmatrix}\right\}$ är en bas till Col A

OBS. rang A = dim Col A = dim Row A
rang A = rang A^T

(4.7) Basbyten

Problem: vi har koord. för en vektor x i basen $\mathcal{B}$

Vi vill ha $[x]_{\mathcal{C}}$ där $\mathcal{C}$ är en annan bas.

Ex. $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$.

Vi vet att $b_1 = 2c_1 + c_2$ och $b_2 = 3c_1 + 2c_2$.

Om $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, vad är $[x]_{\mathcal{C}}$?

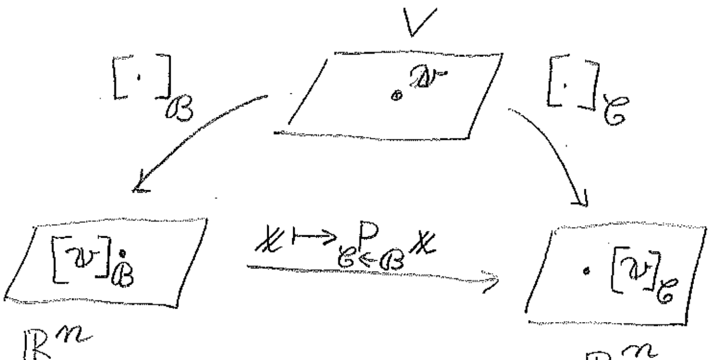
<u>Lösning</u>: (koordinatavb. är linjär!)

$$[x]_{\mathcal{C}} = [3b_1 + b_2]_{\mathcal{C}} = 3[b_1]_{\mathcal{C}} + [b_2]_{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{kallas } \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \\ \text{basbytematris}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= [x]_{\mathcal{B}}}$$

Så $[x]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$ (SATS 15)

där $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$.

konkret: $[x]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$.



Åt andra hållet: $[x]_{\mathcal{C}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} [x]_{\mathcal{B}} \iff [x]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} [x]_{\mathcal{C}}$.

dvs $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P^{-1}} = \begin{bmatrix} [c_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [c_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$.

<u>Ex.</u> $\mathbb{P}_2$ $\quad b_1 = 1, \quad b_2 = t, \quad b_3 = t^2 \quad$ bas $\mathcal{B}$

$c_1 = 1 \quad c_2 = t-1 \quad c_3 = (t-1)^2$ bas $\mathcal{C}$.

Hitta basbytematris åt båda hållen.

Börja med $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} [c_1]_{\mathcal{B}} & [c_2]_{\mathcal{B}} & [c_3]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eftersom

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 1 \\ I & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Ex.</u> $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

$\mathcal{C} = \{c_1, c_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Hitta basbytematris på båda hållen.

Börja med $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} [b_1]_{\mathcal{C}} & [b_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$

Vi vill lösa $\quad x_1 c_1 + x_2 c_2 = b_1$ och

$x_1 c_1 + x_2 c_2 = b_2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & -11 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -17 & 11 \\ 0 & 1 & 11 & -7 \end{array}\right]$$

så $[b_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -17 \\ 11 \end{bmatrix}$, $[b_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 11 \\ -7 \end{bmatrix}$. $\quad \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} -17 & 11 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1} = \frac{1}{119-121} \begin{bmatrix} -7 & -11 \\ -11 & -17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 & 11/2 \\ 11/2 & 17/2 \end{bmatrix}.$$

Också: $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}{P} \; \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}^{-1} \; \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 11 \\ 11 & -7 \end{bmatrix}$$

(5.1) Egenvärden och egenvektorer

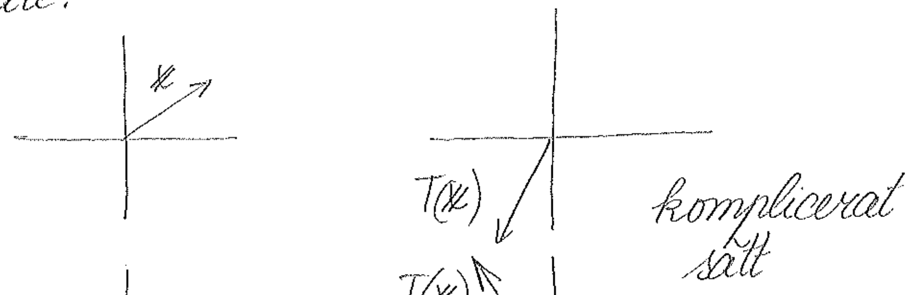
Oftast avbildar avbildningar vektorer på ett komplicerat sätt, men det finns också vektorer som avbildas på ett enkelt sätt.

Allmänt:

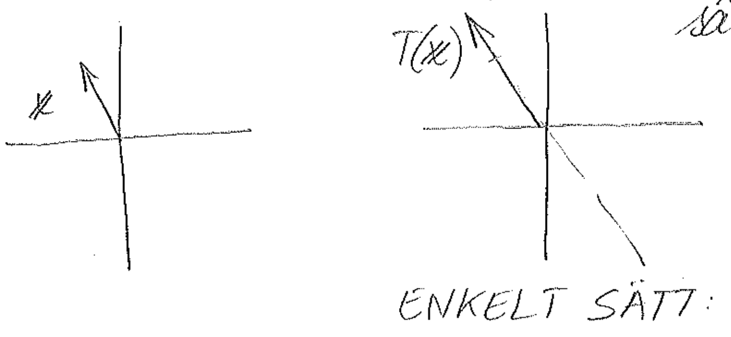
$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

SAMMA

$T(x) = Ax$



men:



DEF. En <u>egenvektor</u> till $n\times n$-matris A är en vektor $x \neq 0$ sådan att $Ax = \lambda x$ för någon skalär $\lambda \in \mathbb{R}$. Ett <u>egenvärde</u> till A är en skalär λ s.a. $Ax = \lambda x$ för någon vektor x. I så fall kallas x egenvektor som hör till egenvärdet λ.

4/10 <u>Ex.</u> Är $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en egenvektor till $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$?

Test: $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7+5 \\ -4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ja, med egenvärde $\lambda = 2$.

<u>Ex.</u> Är $\lambda = -3$ ett egetvärde till $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$?

Dvs. finns det x s.a. $Ax = -3x$?

$Ax + 3x = 0 \iff (A + 3I)x = 0.$

Lös linj. ekvationssystemet:

$$A+3I = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$ trappstegsformen: $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $x_1 + 2x_2 = 0$, $x = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ICKE-TRIVIALA LÖSNINGAR: −3 ÄR EGENV.

Så $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är egenvektor som hör till egenvärdet −3.

Men $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är också

egenvektorer. Dvs Span $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är rummet av

alla egenvektorer som hör till A.

Kallas: <u>egenrummet</u> till −3.

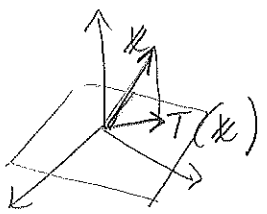
$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas för egenrummet.

<u>Sats 2</u> Om $v_1, \dots, v_r$ är egenvektorer till A som hör till <u>olika</u> egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, så är $v_1, \dots, v_r$ linjärt oberoende.

Användbart för att bygga baser av egenvektorer.

Geometrisk interpretation.

Ex. $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonal projektion på xy-planet.
Vad har T för egenvärden och egenvektorer?



FIXPUNKTER, dvs vektorer som avbildas på sig själv är egenvektorer med $\lambda = 1$
$T(x) = 0 \Longrightarrow x$ är egenvektor som hör till 0.
$x \neq 0$

Ex. Låt T vara dilation med 2. Vad är egenvärden?

Ex. Kom på en avbildning i planet som saknar egenvektorer.

(5.2) Den karakteristika ekvationen.

Problem: hur hittar vi egenvärden och egenvektorer till en $n \times n$-matris A?

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x} - (\lambda I)\mathbf{x} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$$

Dvs. λ är egenvärde om $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningen $\iff \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

kallas den karakteristika ekv. till A

$\det(A\lambda - I)$ är ett polynom av grad n

- ekv. har högst n lösningar
- kan sakna reella lösningar (t. ex. $\lambda^2 + 1 = 0$)

Ex. Hitta egenvärden till $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 5 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(6-\lambda) - 4 \cdot 5 = 42 - 7\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 20 =$$

$$= \lambda^2 - 13\lambda + 22 = (\lambda - 2)(\lambda - 11)$$

Hitta egenvektorer (egenrum):

lös $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \iff (A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $(A - 11I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

som i exemplet i (5.1)

$A - 2I = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$	$A - 11I = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
Span $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ är egenrummet $= \mathrm{Nul}(A - 2I)$	Span $\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ är egenrummet

[ROTATION FRÅN 8]

SPECIALFALL: Om A är en triangulär matris:

t.ex. $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 & 5 \\ 0 & -1-\lambda & 7 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(6-\lambda) = 0.$$

Egenvärden är $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 6$: kan läsa de av direkt från diagonalen.

5/10

OBS. $A \xrightarrow[\text{radop.}]{\text{elem.}} B$ A och B har inte samma egenvärden (eller kar. ekv.)

SATS 2.8 (forts.) Följande är ekvivalenta:
(a) A är inverterbar
(s) $\lambda = 0$ är inte egenvärde till A

Motivering: A inverterbar $\Longleftrightarrow$
$A\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$ har bara den triv. lösningen $\Longleftrightarrow$ (s)

DEF. Om λ_1 är ett egenvärde till A och $(\lambda_1 - \lambda)$ har grad r i den karakteristika ekvationen, så kallas r för den algebraiska multipliciteten av λ_1.

[λ_1:s alg. multipliciteten har konsekvenser för hur stor dimensionen av egenrummet som hör till λ_1 kan vara.]

Ex. Säg att vi vet att A är en 5×5-matris med kar. ekvationen $\det(A-\lambda I) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0$.

Vad är egenvärdena och med vilken multiplicitet?

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^3(\lambda-1)^2 \quad (= \lambda^3(1-\lambda)^2).$$

$\lambda_1 = 0$ mult. 3, $\lambda_2 = 1$ mult. 2.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisen för rotation om $\frac{\pi}{2}$ moturs.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

saknar reelle lösning! $(\lambda = \pm i)$

Def. Två $n \times n$-matriser A och B är konjugerade (EN: "similar") om det finns en inverterbar matris P sådan att $A = PBP^{-1}$!
(eller: $B = P^{-1}AP$).

SATS 5.4 Om A och B är konjugerade, så har de samma kar. ekvation och alltså samma egenvärden.

Bevis: Vi vill jämföra $\det(B - \lambda I)$ med $\det(A - \lambda I)$.
$B = P^{-1}AP$, så $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P =$

$= P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$ (räkneregler för matrismult.)

Så $\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) =$

$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) = \frac{1}{\cancel{\det P}} \det(A - \lambda I) \cdot \cancel{\det P} =$

$= \det(A - \lambda I)$.

OBS. Matriser med samma kar. ekv. behöver inte vara konjugerade.

Motexemplet

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ och I är inte konjugerade.

(5.3) Diagonalisering

Idé: faktorisera matriser som $A = PDP^{-1}$ där D är en diagonal matris och P är inverterbar.

Det går inte alltid: om det går kallas A diagonaliserbar. (Dvs: A är konjugerade till en diagonal matris).

Varför? Praktiska tillämpningarna.

T.ex. är en fördel att det går lättare at räkna ut $A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ styck}}$ (och $A^{-k} = \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ styck}}$ om A är inv. bar).

Den viktigaste motivering kommer senare i termer av basbyten.

Ex. $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad D^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$ osv.

Så $D^k = \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$.

Om $A = PDP^{-1}$ så är

$$A^k = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{P^{-1}P = I}DP^{-1}) \cdots \underbrace{(}_{P^{-1}P = I}PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$$

det räcker att multiplicera 3 matriser istället för k matriser

SATS 5.5

En $n \times n$-matris A är diagonaliserbar om och endast om den har n linjärt oberoende egenvektorer.

I sådant fall är kolonnerna i P egenvektorer till A och elementer i D är motsvarande egenvärdena till A.

Så: $A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $P = [v_1 \ \cdots \ v_n]$

där $A v_k = \lambda_k v_k$ för $k = 1, \ldots, n$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är unika och kan bara byta plats med varandra

P kan väljas på olika sätt.

Ex. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ är inte diagonaliserbar. (saknar egenv.)

Ex. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, om det går.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 12$$

$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -4 \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

Egenvektorn till $\lambda_1 = 3$?

Lös $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, dvs. $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\begin{bmatrix} -3-3 & 3 \\ 2 & 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underset{\text{trappstegsf.}}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$ vi kan välja $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Egenvektor till $\lambda_2 = -4$? Lös $(A + 4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ vi kan välja $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Så: $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Test: $P^{-1} = \frac{1}{1+6} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$P D P^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ +2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & +3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3(1-8) & 9+12 \\ 6+8 & 18-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

<u>Sats 5.6</u> Om en $n \times n$-matris A har n olika egenvärden så är den diagonaliserbar.

IDÉ:

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ olika egenvärden

$v_1, \dots, v_n$ tillhörande egenvektorer $\quad P = [v_1 \cdots v_n]$

Om vi inte ha det?

A kan vara diagonaliserbar ändå.

Ex. Projektion på xy-planet $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Egenvärden: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

$v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ vi kan ta $v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

båda hör till $\lambda_2=1$.

$A=PDP^{-1}$ där $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Ex. $A=\begin{bmatrix}-4&5&-3\\-2&7&-7\\-2&1&-1\end{bmatrix}$, är A diagonaliserbar?

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-4-\lambda&5&-3\\-2&7-\lambda&-7\\-2&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=\cdots=(6-\lambda)(-2-\lambda)^2.$$

$$\left(\overline{R_2}\mapsto R_2+R_3 \quad \begin{vmatrix}-4-\lambda&5&-3\\0&6-\lambda&-6+\lambda\\-2&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda&5&-3\\0&1&-1\\-2&1&-1-\lambda\end{vmatrix}= \right.$$

$K_3\mapsto K_3+K_2$

$$\left.=(6-\lambda)\begin{vmatrix}-4-\lambda&5&2\\ \boxed{0\quad 1\quad 0}\\-2&1&-\lambda\end{vmatrix}\ \underset{\text{teckne-mönster}}{=}\ (6-\lambda)\big(\underbrace{(-4-\lambda)(-\lambda)+4}_{\lambda^2+4\lambda+4}\big)\right)$$

$\begin{matrix}+&-&+\\-&+&-\\+&-&+\end{matrix}$

Vi vet inte om det går att diagonalisera.

$\lambda_1=6$ är enkelt: $A-6I=\begin{bmatrix}-10&5&-3\\-2&1&-7\\-2&1&-7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_2=-2$ $A+2I=\begin{bmatrix}-2&5&-3\\-2&9&-7\\-2&1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ ← egenrummet är 1-dim.

$v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. Det går inte!