Sats 5.7.

A $n \times n$-matris, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ egenvärden

(a) dimensionen av egenrummet till λ_n är alltid $\leq$ alg. multipliciteten av λ_k.

(b) A är diagonaliserbar om och endast om summan av dim. av egenrummen är lika med n.
För detta krävs:

(1) att $\det(A - \lambda I)$ gör att faktorisera helt (som produkt av $(\lambda_k - \lambda)^{m_k}$)

(2) dim egenrummet = alg. multipliciteten för varje λ_k

(c) Om A är diagonaliserbar och B_k är en bas för egenrummet till λ_k, så är $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_p$ en bas till $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer till A.

KONKRET: $\boxed{\text{A diag. bar}}$

(1)
$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p}$] om det inte går är A <u>inte</u> diag. bar

$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

(2) för varje $k = 1, \dots, p$ finns det m_k egenvektorer $v_1^{(k)}, \dots, v_{m_k}^{(k)}$ som hör till λ_k och är linjärt oberoende.
[Om de inte finns är dim(egenrummet) $< m_k$ och A är <u>inte</u> diag. bar]

(c) Vi sätter alla egenvektorer $\underbrace{v_1^{(1)}, \dots, v_{m_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(p)}, \dots, v_{m_p}^{(p)}}_{\text{KOLONNER AV P}}$ och hittar en bas till $\mathbb{R}^n$

(5.4) Egenvektorer av linjära avbildningar.
Vi kan tolka diagonaliserbarhet geometriskt.

<u>kom ihåg</u>: $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linjär avbildning
Då finns en $m \times n$-matris A sådan att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
Den är $\quad A = \left[T(\mathbf{e}_1) \;\; \dots \;\; T(\mathbf{e}_n) \right]$ standardmatris

Vi vill göra detsamma i allmäna vektorrum V med bas $\mathcal{B}$
W " " $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
V \ni \mathbf{x} \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[d, "\text{isomorphism}"] & T(\mathbf{x}) \in W \arrow[d, "\text{isomorphism}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, bend left, "M", "\mathbf{y} \longmapsto M\cdot\mathbf{y}"'] & {[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}}
\end{tikzcd}$$

Det finns alltid ngn matris M s.a. $M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$.
I så fall kallas M för T:s matris relativt baserna $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.
Formel: $\quad M = \left[[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \;\; \dots \;\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \right] = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$

Varför? Säg att $\mathbf{x} = a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_n\mathbf{b}_n$, dvs $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.
Då är $M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = a_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + a_n[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} =$ (linjäritet)

$$= \left[a_1 T(\mathbf{b}_1) + \dots + a_n T(\mathbf{b}_n) \right]_{\mathcal{C}} = \left[T(\underbrace{a_1\mathbf{b}_1 + \dots + a_n\mathbf{b}_n}_{\mathbf{x}}) \right]_{\mathcal{C}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}.$$

Ex. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bas för V
$\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ bas för W

Låt $T: V \longrightarrow W$ vara sådan att $T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{c}_2 + 2\mathbf{c}_3$, $T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{c}_1 + 5\mathbf{c}_2$.
Hitta matrisen till T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$

$$\left[[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \;\; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Specialfall: $V = W$ och $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Ex. $T: \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2 \quad T(1)=t^2, \quad T(t)=1-t \quad T(t^2)=4.$

Vad är T:s matris relativt basen $\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$? ← HÄR ÄR $\mathcal{B}$ OCH $\mathcal{C}$ SAMMA

I så fall kallas den $[T]_{\mathcal{B}}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Formel: $[T(x)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}}$.

Vi kan tillämpa den i $\mathbb{R}^n$ också.

SATS 8. Antag att $A=PDP^{-1}$ med D diagonal matris.
Om $\mathcal{B}$ är basen som består av P:s kolonner, så är D matrisen för avbildning $T(x)=Ax$ relativt basen $\mathcal{B}$
Dvs $D=[T]_{\mathcal{B}}$.

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P=[v_1 \; \cdots \; v_n]$$ v_k egenvektor som hör till λ_k $(k=1,\dots,n)$

$T(v_k)=\lambda_k v_k$, så $[T]_{\mathcal{B}}=D$ där $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$.

$P=[v_1,\dots,v_n]=P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ basbytematris från $\mathcal{B}$ till $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$

Ex. Låt $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortog. projektionen på planet
$x+2y-z=0$.

- Vi kan få fram standardmatrisen A till T genom
$A=[T(e_1)\;\; T(e_2)\;\; T(e_3)]$
Det blir $A=\begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}$ men beräkningen är inte lätt.

- Vi kan diagonalisera A istället
$D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$ $\{v_2, v_3\}$ bas för planet

$x=0: \; v_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y=0: \; v_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ är basbytematrisen $\underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ och $P^{-1} = \underset{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}{P}$

Så om vi tar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, så är

$$A\mathbf{x} = PD\underbrace{P^{-1}\mathbf{x}} = \underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [T]_{\mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}{P} [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{E}} = T(\mathbf{x}).$$

Det gäller för alla konjugerade matriser också. Alla matriser som A är konjugerade med är representationer av $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ relativt olika baser.

(5.7) Tillämpningar på differentialekvationer.

Användning av egenvärden

Kom ihåg: en differentialekv. är en ekvation där det okände är en funktion $x(t)$ och ekvationen innehåller derivator av $x(t)$.

T.ex. $x'(t) = a\,x(t)$ har lösning $x(t) = c \cdot e^{at}$

Säg nu vi har n okända funktioner $x_1(t), \dots, x_n(t)$ och ett ekvationsystem

$$(*) \begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

Om $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ (kolonnvektor) och

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ kan $(*)$ skrivas som $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Vi vill också ha ett begynnelsevilkor $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Detta är ett linjärt system av differentialekv.

Varför heter detta system <u>linjärt</u>?
Om $u(t)$ och $v(t)$ är lösningar, så är $(u+v)t$ och $cu(t)$ också lösningar.
(så kan vi hitta en <u>bas</u> för lösningsrummet).
kallas: fundamentalsystem

Om A är diagonal kan vi lätt lösa systemet.

<u>Ex.</u> $x' = Dx$ där $n=2$ och $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ger

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = -x_2 \end{cases} \Longrightarrow x = (c_1 e^{3t}, c_2 e^{-t}) \text{ allmän lösning}$$

Om A inte är diagonal och v är egenvektor till A som hör till egenvärdet λ, så är $x = ce^{\lambda t} v$ en lösning till $x' = Ax$ (där c är vilken konstant som helst).

<u>Test</u>: låt $x = ce^{\lambda t} v$, då är

$$x' = (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{oberoende}}}{c} e^{\lambda t} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{på } t}}{v})' = c\lambda e^{\lambda t} v$$

$$Ax = A(ce^{\lambda t} v) = ce^{\lambda t} Av = ce^{\lambda t} \cdot \lambda v = x'.$$

Ex. Lös $x' = Ax$ där $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ och $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- kar. ekv. är

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) + 15 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3).$$

$\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = -3$ är egenvärden.

- egenvektor till $\lambda_1 = -1$:

lös $Av = -v$ dvs. $(A+I)v = 0$

$A+I=\begin{bmatrix}3 & -5\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ trappstegsform: $\begin{bmatrix}3 & -5\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

dvs $3x_1-5x_2=0$, $v_1=\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ (alla andra lösningar är multipla av v_1).

- egenvektor till $\lambda_2=-3$: lös $Ax=-3x$, dvs $(A+3I)x=0$

$A+3I=\begin{bmatrix}5 & -5\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ trappstegsform: $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

dvs. $x_1-x_2=0$, $v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

- tillbaka på differentialekv. systemet betyder detta:

allmän lösning är $x=c_1v_1e^{-t}+c_2v_2e^{-3t}$

Använd begynnelsevilkor:

$x(0)=c_1v_1+c_2v_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ dvs $\underbrace{c_1\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{\text{linj. ekv. syst.}}$

$$\left[\begin{array}{cc|c}5 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}\boxed{2} & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -3/2\end{array}\right]$$

$c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=-\frac{3}{2}$

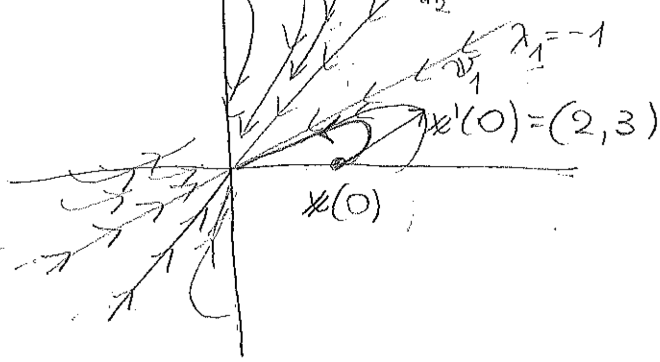
Svar: lösning är $x(t)=\frac{1}{2}v_1e^{-t}-\frac{3}{2}v_2e^{-3t}$.

$x(0)$ är känt, vad händer med $x(t)$ för $t\to\infty$? (dvs när tiden går?)

Båda egenvärdena är negativa, $e^{-t}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

så: $x(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$

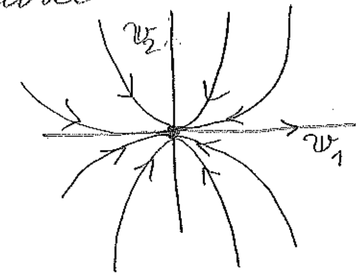
FASPORTRÄTT: vi ritar lösningsbanor till alla begynnelsevärden av x.



① är en sänka/attraktor (EN: sink/attractor)

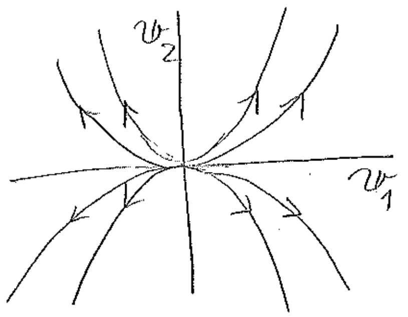
SCHEMA: för $n=2$

båda egenvärden är negativa:
sänka/attraktor
(SINK/ATTRACTOR)



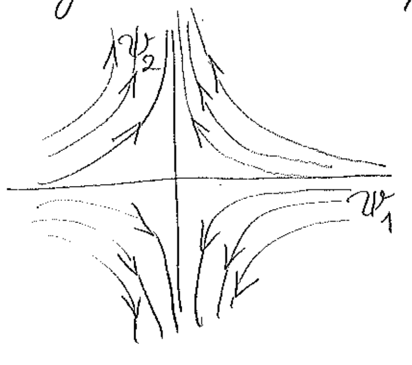
$|\lambda_1| < |\lambda_2|$

båda egenv. är positiva:
källa/repellor
(SOURCE/REPELLER)
alla lösningar strömmar
från origo



$|\lambda_1| < |\lambda_2|$

ett egenvärde är positivt och ett egenvärdet är negativt: sadelpunkt (saddle point)



$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$

KOMPLEXA LÖSNINGAR: om $\det(A-\lambda I)$ bara har kompl. lösningar, så är de konjugerade: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

HOPPADE ÖVER DET. I FÖRELÄSN.

Vi kan beräkna egenvektorer om vi tilllåter komplexa koord.. Då är $v_2 = \overline{v_1}$.

$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ $\quad x_2(t) = \overline{v_1} e^{\overline{\lambda_1} t} = \overline{x_1}(t)$ utgör ett fundamentalsystem med komplexa koefficienter

$\operatorname{Re} x_1(t)$, $\operatorname{Im} x_1(t)$ utgör ett fundamentalsystem av reella lösningar

$\operatorname{Re} x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1 + \overline{x_1})$ $\quad \operatorname{Im} x_1(t) = \frac{1}{2}(x_1 - \overline{x_1})$

VI HOPPADE ÖVER DET

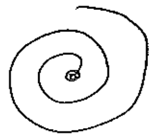
Formel: A 2×2-matris,
kompl. egenvektorer $u \pm i v$ som hör till $\lambda = a \pm ib$.
Då är

$$y_1(t) = (u \cos bt + v \sin bt)\, e^{at}$$
$$y_2(t) = (u \sin bt - v \cos bt)\, e^{at}$$

lösningar till $x' = Ax$.
(Bevis: se boken)

banor roterar om origo
(spiralpunkt
en: SPIRAL POINT)

DEF. AV SPIRALPUNKT: JA →



$a > 0$ ut
$a < 0$ in
$a = 0$ (stabila banor)

0/10 Ett annat sätt att se på ekvationen vi nyss löste:
Sätt $P = [v_1 \ v_2]$, då är $A = PDP^{-1}$ och

$$Ax = PD\underbrace{P^{-1}x}_{y}$$

$y(t) = P^{-1}x(t)$ är koordinaterna för lösningar med avseende på egenvektorbasen $\{e^{\lambda_1 t}v_1, e^{\lambda_2 t}v_2\}$.

$y(t) = P^{-1}x(t)$ är en lösning till $y' = Dy$, dvs

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

lätt att lösa: $y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$

där $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = y(0) = P^{-1}x_0$

$$x(t) = Py(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Variabelbyte från x till y kallas återkoppling av systemet ("decoupling the system")

(6.1) Inre produkt, längd, ortogonalitet

HÅLET: VEKTORRUM + AVSTÅND MELLAN VEKTORER

Vi börjar med en repetition:

Def. Den inre product (EN: inner product, dot product) av två vektorer $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ är

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{där } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Sats 6.1. Låt $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

b) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

c) $(c \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

d) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ och $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Def. Längden (eller: normen; EN: length, norm) av $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ är $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$. Avståndet mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ ges av $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

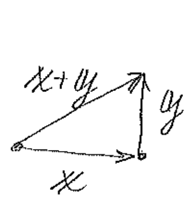
OBS. $\|c \cdot \mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\|$. $\quad |\cdot|$: absolutbelopp

Om $\mathbf{x}$ har längd 1 så kallas $\mathbf{x}$ <u>enhetsvektor</u>.

Obs: $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ är en enhetsvektor (med samma riktning som $\mathbf{x}$).

Def. $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala om $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Sats 6.2: Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$



$\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är ortogonala om och endast om de uppfyller: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

(Nu kommer nya saker)

Def. Låt W vara ett underrum i $\mathbb{R}^n$. Det ortogonala komplementet till W är mängden av alla vektorer som är ortogonala mot alla vektorer i W. (kallas $W^\perp$)

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0 \text{ för alla } w \in W\}.$$

OBS. $W^\perp$ är ett underrum: $u_1, u_2 \in W^\perp \Longrightarrow$

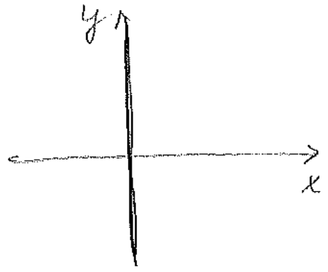
$\Longrightarrow (c u_1 + d u_2) \cdot w = c \underbrace{u_1 \cdot w}_{=0} + d \underbrace{u_2 \cdot w}_{=0} = 0 \quad \forall w \in W$

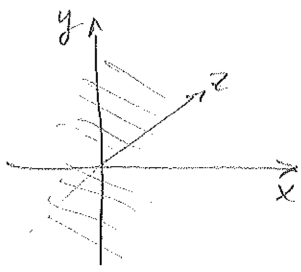
$\Longrightarrow c u_1 + d u_2 \in W^\perp$

och $0 \in W^\perp$.

Ex. Vad är det ortog. kompl. till x-axeln i $\mathbb{R}^2$?

" " " " " " x-axeln i $\mathbb{R}^3$?

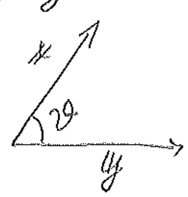




(Vi hoppar över Sats 6.3).

Def. Vinkeln ϑ mellan x och y (båda $\neq 0$) ges av

$$x \cdot y = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\vartheta$$



T.ex. $\vartheta = 0$ dvs. $\cos\vartheta = 1$

$x \cdot y = \|x\| \, \|y\|$, vilket stämmer: $y = ax$ med $a > 0$

$$x \cdot y = ax \cdot x = a\|x\|^2 = \|x\| \|ax\| = \|x\| \|y\|$$

$a > 0$

$a = |a|$

Eller: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $(90°)$

$x \cdot y = 0$ och $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

(6.2) Ortogonala mängder

Def. En mängd $\{u_1, \dots, u_p\}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonal om varje par av (olika) vektorer är ortogonala, dvs $u_i \cdot u_j = 0$ när $i \neq j$.

Ex. $\{e_1, \dots, e_n\}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala:

$$e_i \cdot e_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ i \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ j & \end{array} = \underset{\text{ställe } i}{1 \cdot 0} + \underset{\text{ställe } j}{0 \cdot 1} = 0 \text{ för } i \neq j.$$

Sats 6.4. Om $S = \{u_1, \dots, u_p\}$ är ortogonala och $0 \notin S$, så är alla vektorer i S linjärt oberoende.

Bevis: Vi måste visa att $c_1 u_1 + \dots + c_p u_p = 0$ bara har den triv. lösning. Vi multiplicerar ekv. med u_1:

$$c_1 \underset{\neq 0}{u_1 \cdot u_1} + c_2 \underset{= 0}{u_2 \cdot u_1} + \dots + c_p \underset{= 0}{u_p \cdot u_1} = 0 \cdot u_1 = 0$$

Så $c_1 = 0$, och så vidare för de andra.

Obs. Detta betyder att S är en bas för Span(S).

Def. En ortogonalbas (OG-bas) för ett underrum är en bas som är också en ortogonal mängd.

Ex. Standardbasen av $\mathbb{R}^n$ är en OG-bas.

Varför är ortogonalbaser bra? U.a. kan vi beräkna koordinater ganska snabbt.

Sats 6.5. Låt $\{u_1, \dots, u_p\}$ vara en OG-bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$. Om y ligger i W, så gäller

$y = c_1 u_1 + \dots + c_p u_p$ där $c_j = \dfrac{y \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$ för varje $j = 1, \dots, p$.

Bevis: multiplicera y med u_j som i beviset av Sats 6.4.
Då är $y \cdot u_j = c_j \, u_j \cdot u_j$.

Ex. $u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$ är en OG-bas för $\mathbb{R}^2$.

Hitta koord. för $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i den basen.

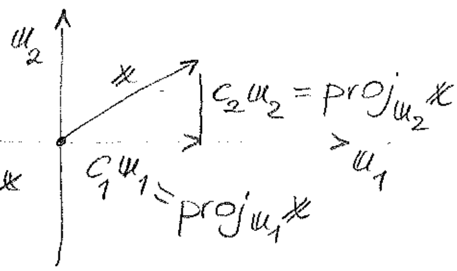
Lösning: $c_1 = \dfrac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = \dfrac{4+6}{16+9} = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$

$c_2 = \dfrac{x \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} = \dfrac{-6+16}{36+64} = \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10}$

Tidigare metod där $\mathcal{B}$ inte är ortogonal: lös ekv. syst.

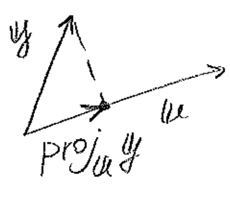
$x = c_1 u_1 + c_2 u_2$ $\quad\quad$ $[u_1 \; u_2 \,|\, x]$ utökade matris.

$\{u_1, u_2\}$ ortogonal, $x = \underbrace{c_1 u_1}_{\text{ortogonalproj. av } x \text{ på } u_1} + \underbrace{c_2 u_2}_{\dots \text{av } x \text{ på } u_2}$



Def. Ortogonalproj. av y på u ges av

$\text{proj}_u y = \hat{y} := \underbrace{\dfrac{y \cdot u}{u \cdot u}}_{= \alpha \text{ i lab. 2}} u$



Def. $\{u_1, \dots, u_p\}$ är en ortonormal mängd (kort: ON-mängd) om den är en OG-mängd av enhetsvektorer.

eller: ortonormerad mängd

En bas som är en ON-mängd kallas en ON-bas (ortonormalbas, ortonormerad bas).

Def. En $m \times n$-matris vars kolonner bildar en ON-mängd kallas en ON-matris. OBS: $m \geq n$.

Traditionellt heter kvadratiska ON-matriser ortogonala matriser.

Vad är speciellt för ON-matriser?

Sats 6.6. En $m \times n$-matris U är ortonormal om och endast om $U^T U = I_m$

[På platsen (i,j) i $U^T U$ finns $u_i \cdot u_j = u_i^T u_j$]

Om U är $n \times n$: $U^{-1} = U^T$.

Sats 6.7 U $m \times n$ ON-matris, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Då gäller:

(a) $\|Ux\| = \|x\|$ längden behålls

(b) $Ux \cdot Uy = x \cdot y$ inre produkt behålls

(c) $Ux \cdot Ux = 0 \iff x \cdot y$ ortogonalitet behålls.

Bevis: (b) $Ux \cdot Uy = (Ux)^T (Uy) = x^T U^T U y \overset{\text{SATS 6.6}}{=}$

$= x^T I y = x^T y = x \cdot y$.

11/10

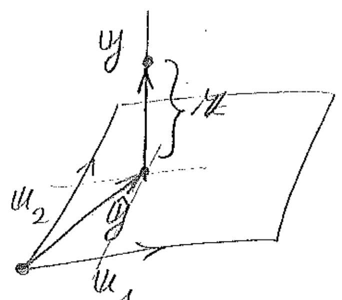
(6.3) Ortogonala projektioner

$\text{proj}_u y$ är proj. på linjen Span u, vi kan projicera på plan och andra underrum också.

Sats 6.8. Tag ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ som har en OG-bas $u_1, \dots, u_p$. Då kan varje $y \in \mathbb{R}^n$ skrivas som $y = \hat{y} + z$, där $\hat{y} \in W$ och $z \in W^\perp$.

$\hat{y}$ och $\hat{z}$ är unika för y.

Dessutom: $\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \cdots + \frac{y \cdot u_p}{u_p \cdot u_p} u_p$ och $z = y - \hat{y}$.



$y \in W \iff y = \hat{y}$

$y \in W^{\perp} \iff \hat{y} = 0$.

<u>OBS.</u> Om $u_1, \ldots, u_p$ bildar en <u>ON</u>-bas blir det bara

$$\hat{y} = (y \cdot u_1) u_1 + \cdots + (y \cdot u_p) u_p .$$

Dessutom: $\hat{y}$ är punkten i W som ligger <u>närmast</u> y.
(Bevis finns i boken).

Ex. Räkna ut den ortog. proj. av $y = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ på underrummet som spänns upp av $u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$u_1 \cdot u_2 = -3 + 3 + 0 = 0$, dvs OG

$$\hat{y} = \frac{-6+4+0}{9+1} u_1 + \frac{2+12-35}{9+1+25} u_2 = -\frac{1}{5} u_1 - \frac{3}{5} u_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -10/5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(Testa: $y - \hat{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot u_1 och u_2).