

Kompletterande övningar i Komplex analys - Val av entydig gren

1. Låt $f(z)$ vara den (entydiga) gren av $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ som är definierad i $\mathbb{C} \setminus \{y=0, x \geq 1\}$ och för vilken $f(0)$ är ett negativt reellt tal. Förklara varför snittet är lämpligt, d.v.s. varför det finns en gren av $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ i $\mathbb{C} \setminus \{y=0, x \geq 1\}$. Beräkna $f(1+i)$. (Svar: $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$)

2. Låt $f(z)$ vara den (entydiga) gren av $z^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}}$ som är definierad i mängden $\mathbb{C} \setminus (\{x=0, y \geq 0\} \cup \{x=1, y \leq 0\})$ och för vilken $f(\frac{1}{2}) = \frac{i}{2}$. Förklara varför snittet är lämpligt. Beräkna $f(-1)$. (Svar: $\sqrt{2}$)

3. Låt $f(z)$ vara den (entydiga) gren av $(z^2-1)^{\frac{1}{3}}$ som är definierad i $\mathbb{C} \setminus \{y=0, |x| \geq 1\}$ och för vilken $f(0) = -1$. Förklara varför snittet är lämpligt. Beräkna $f(i)$ och $f(1+i)$. (Svar: $-\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{5}e^{i(\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{3} \arctan \frac{1}{2})}$)