

Komplex matematisk analys för F2, Kf2; Komplex analys för TM2

SATS (KARAKTERISERING AV HÄVBAR SINGULARITET). Låt f ha isolerad singularitet i z_0 . Då är följande påståenden ekvivalenta:

- (i) f 's Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller inga negativa potenser av $z - z_0$;
- (ii) f har ett (ändligt) gränsvärde då $z \rightarrow z_0$;
- (iii) f är begränsad i en punkterad omgivning till z_0 .

BEVIS. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Av (i) följer att

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \epsilon,$$

för något $\epsilon > 0$. Vi kan då låta $z \rightarrow z_0$ och får att

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Låt $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ och välj $\epsilon = 1$; då gäller att det finns $\delta > 0$ så att $|f(z) - L| < 1$ för $0 < |z - z_0| < \delta$. Triangelolikheten ger att $|f(z)| < |L| + 1$ för alla z i den punkterade δ -omgivningen till z_0 .

(iii) $\Rightarrow$ (i) (Riemanns sats)

Betrakta f 's Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 :

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

där

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

och γ kan väljas till cirkeln med medelpunkt z_0 och radie r (r antas vara så litet att γ ligger i den punkterade omgivningen). För koefficienterna med negativa index får vi då

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-m+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{m-1} d\zeta, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

och

$$|a_{-m}| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \cdot r^{m-1} \leq Mr^m \rightarrow 0 \quad \text{när } r \rightarrow 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Eftersom a_{-m} är oberoende av r , medför detta att $a_{-m} = 0$ för alla naturliga tal m . (OBS! $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$)

SATS (KARAKTERISERING AV POL). Låt f ha isolerad singularitet i z_0 . Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) f 's Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller ändligt många negativa potenser av $z - z_0$;

(ii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

BEVIS. (i) $\Rightarrow$ (ii) Låt m vara det största naturliga talet, för vilket $a_{-m} \neq 0$ (d.v.s. polens ordning). Vi har att

$$f(z) = (z - z_0)^{-m}(a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

där $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_{-m} \neq 0$. Detta medför att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Givet är nu att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Det betyder att $f \neq 0$ i en punkterad omgivning till z_0 , vilket ger att funktionen $h = \frac{1}{f}$ har isolerad singularitet i z_0 och att $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$. Enligt föregående sats har h hävbar singularitet i z_0 , d.v.s. h kan betraktas som analytisk i z_0 , och h har nollställe i z_0 , vilket ger

$$h(z) = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots, \quad \text{i en omgivning till } z_0 \quad (b_m \neq 0, m \geq 1).$$

I en punkterad omgivning till z_0 gäller då att

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots},$$

där funktionen

$$g(z) = \frac{1}{b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \dots}$$

är analytisk och icke-noll i en omgivning till z_0 (som kvot mellan två analytiska funktioner, där nämnaren och täljaren är skilda från noll). Därmed har vi

$$g(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots,$$

och

$$f(z) = c_0(z - z_0)^{-m} + c_1(z - z_0)^{-m+1} + \dots, \quad (c_0 \neq 0),$$

vilket skulle bevisas.

SATS (KARAKTERISERING AV VÄSENTLIG SINGULARITET). Låt f ha isolerad singularitet i z_0 . Då är följande påståenden ekvivalenta:

(i) f 's Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 innehåller oändligt många negativa potenser av $z - z_0$;

(ii) f har inget gränsvärde när $z \rightarrow z_0$, vare sig egentligt eller oegentligt (d.v.s. ändligt eller oändligt).

BEVIS. Följer direkt av de två satserna ovan.

SATS (CASORATI-WEIERSTRASS). Låt z_0 vara väsentlig singularitet för f . Då gäller att för alla $\alpha \in \mathbb{C}$ kommer f att anta värden godtyckligt nära α i en godtyckligt liten punkterad omgivning till z_0 , d.v.s.

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \epsilon, \eta > 0 \quad \exists z_\eta : 0 < |z_\eta - z_0| < \eta \quad \text{s.a.} \quad |f(z_\eta) - \alpha| < \epsilon.$$

BEVIS. Antag motsatsen, d.v.s. antag att

$$\exists \alpha_0 \in \mathbb{C}, \exists \epsilon_0, \eta_0 > 0 \quad \forall z : 0 < |z - z_0| < \eta_0 \quad \text{gäller} \quad |f(z) - \alpha_0| > \epsilon_0.$$

Det betyder att

$$\frac{1}{|f(z) - \alpha_0|} < \frac{1}{\epsilon_0},$$

och därmed att funktionen

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha_0}$$

är begränsad i en punkterad (η_0 -)omgivning till z_0 . Det ger att F har hävbar singularitet i z_0 . Av Riemanns sats (se ovan) följer att F har ett gränsvärde när $z \rightarrow z_0$. Låt $\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = c$. Om $c \neq 0$ får vi att $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{1}{c} + \alpha_0$ och därmed att f har hävbar singularitet i z_0 , vilket är en motsägelse. Om $c = 0$ får vi $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, vilket betyder att f har pol i z_0 - även detta en motsägelse.

Antagandet av motsatsen till satsens påstående ledde alltså till motsägelse. Därmed är satsen bevisad.