

# Matematik för sjöingenjörsprogrammet

Matematiska Vetenskaper

29 augusti 2012

## Innehåll

|          |                                                                      |          |
|----------|----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>2</b> | <b>Ekvationer</b>                                                    | <b>1</b> |
| 2.1      | Förstgradsekvationer . . . . .                                       | 5        |
| 2.1.1    | Övningar . . . . .                                                   | 6        |
| 2.2      | Andragradsekvationer . . . . .                                       | 7        |
| 2.2.1    | Övningar . . . . .                                                   | 11       |
| 2.3      | Ekvationer som leder till andragradsekvationer . . . . .             | 12       |
| 2.3.1    | Övningar . . . . .                                                   | 15       |
| 2.4      | Linjära ekvationssystem . . . . .                                    | 16       |
| 2.4.1    | Övningar . . . . .                                                   | 19       |
| 2.5      | Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision . . | 20       |
| 2.5.1    | Övningar . . . . .                                                   | 25       |

## 2 Ekvationer

Vi börjar med att diskutera vad en ekvation är och vad det är för generella regler som gäller vid ekvationslösning. Vi tittar också på hur ekvationer kan dyka upp på ett naturligt sätt vid problemlösning. Lösningssmetoder för några typer av ekvationer kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som (i regel) innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

**Exempel.** Likheten  $21 - x = x - 3$  är en ekvation med en obekant  $x$ . Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven  $x$ , men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten  $g^2 - g = 1$  är en ekvation med en obekant som heter  $g$ .

Likheten  $3x + 2y = 31$  är en ekvation som innehåller två obekanta  $x$  och  $y$ .

Likheten  $8 = 5 + 3$  är en ekvation som inte innehåller några obekanta utan enbart tre mycket bekanta heltal.  $\square$

Det är inte ovanligt att begreppen ekvation, formel och funktion blandas ihop. En ekvation beskriver ett samband. Detta samband kan vara uppfyllt för alla tillåtna variabelvärden, i så fall talar man om en *identitet*. I annat fall är man ofta intresserad av de specifika variabelvärden för vilka sambandet uppfylls, d v s man är intresserad av att *lösa ekvationen*. En formel är ett uttryck som oftast innehåller symboler (variabler) och i vilket man kan sätta in olika variabelvärden. Funktionsbegreppet diskuteras ingående senare i kursen. Här kan vi nöja oss med att säga att en funktion kan ges av en formel, men behöver inte göra det, och att en ekvation ofta har formen  $f = g$ , där  $f$  och  $g$  är funktioner.

Nedan listar vi några ord som på ett naturligt sätt hör samman med begreppen ekvation, formel och funktion:

*ekvation*: sätta in, obekant, lösa, lösa ut, lösning, lösningsmängd, rot, falsk rot, ekvivalenta;

*formel*: variabel, sätta in;

*funktion*: sätta in, variabel, värde, funktionsvärde, beräkna, nollställe, graf.

Givet en ekvation med en obekant  $x$  säger vi att talet  $a$  är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in  $x = a$ . Att *lösa* en ekvation innebär att bestämma dess lösningsmängd, d v s hitta alla dess lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet. Ofta är man intresserad av alla lösningar inom en viss talmängd, t ex alla reella lösningar, alla positiva lösningar, alla heltalslösningar etc. Om inget annat sägs letar vi efter reella lösningar.

**Exempel.** Talet 12 är lösning till ekvationen  $21 - x = x - 3$ , eftersom  $21 - 12 = 12 - 3 = 9$ .

Talet 2 är lösning till ekvationen  $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 12 = 0$ , därför att  $2 \cdot 2^4 - 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 12 = 32 - 8 - 8 - 4 - 12 = 0$ . Genom att konstatera detta har vi dock inte löst ekvationen, eftersom den har fler lösningar. Vi har inte ens löst ekvationen i  $\mathbb{R}$  då det finns en reell lösning till, nämligen  $-\frac{3}{2}$ . Däremot är 2 den enda lösningen i  $\mathbb{Z}$ .

Talet  $a\pi$  är en lösning till ekvationen  $\sin x = 0$  om och endast om (precis när)  $a \in \mathbb{Z}$ .

Ekvationen  $x^2 + 2 = 0$  saknar reella lösningar, eftersom  $x^2 \geq 0$  för alla reella  $x$ .

Ekvationen  $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$  är en identitet, d v s dess lösningsmängd är hela  $\mathbb{R}$ .  
 $\square$

När man inte har metoder för att lösa en ekvation får man nöja sig med att visa att det finns (alternativt inte finns lösningar), att det finns ett visst antal lösningar, att de har vissa egenskaper etc. Ibland visar sig detta vara tillräckligt, t ex kan det räcka med att veta att en ekvation har en enda lösning och att denna är positiv, utan att man är så intresserad av exakt vad lösningen är. En sak som man ofta gör är att lokalisera lösningarna, d v s bestämma relativt små intervall som innehåller varsin lösning. Vid behov kan man sedan använda numeriska metoder för att få närmevärden.

Givet en ekvation med två obekanta  $x, y$  säger vi att talparet  $(a, b)$  är *en lösning* till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in  $x = a$ ,  $y = b$ . Att *lösa* en ekvation innebär återigen att hitta alla lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet.

**Exempel.** Talparet  $(1, 14)$  är en lösning till ekvationen  $3x + 2y = 31$ , eftersom  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 14 = 3 + 28 = 31$ . Ekvationen har oändligt många lösningar, talparet  $(x, y)$ , där  $x = a$ ,  $y = \frac{31 - 3a}{2}$ , är en lösning för alla reella  $a$ . (Om vi låter  $x$  stå kvar som variabelnamn och skriver  $y = \frac{31 - 3x}{2}$ , säger man att man *löst ut  $y$  i termer av  $x$* , eller *med hjälp av  $x$* ).  
 $\square$

Två ekvationer kallas *ekvivalenta* om de har exakt samma lösningsmängd.

**Exempel.** Ekvationerna  $x - 1 = 0$  och  $(x - 1)^2 = 0$  är ekvivalenta, eftersom båda har en enda lösning,  $x = 1$ .

Ekvationerna  $x^2 = -1$  och  $\sin x = 2$  är ekvivalenta i  $\mathbb{R}$ , eftersom båda saknar reella lösningar.

Ekvationerna  $x(x - 1) = x$  och  $x - 1 = 1$  är *inte* ekvivalenta. Den andra har som enda lösning  $x = 2$ , medan den första har lösningarna  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

Ekvationerna  $x - 1 = 1$  och  $(x - 1)^2 = 1$  är *inte* ekvivalenta. Den första har lösningsmängden  $\{2\}$ , medan den andra har lösningsmängden  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .  
 $\square$

I ett av exemplen visade det sig att man tappat en rot vid förkortning med  $x$ . Det sista exemplet visar att en ekvation som fås ur en annan medelst kvadrering inte nödvändigtvis är ekvivalent med den givna. I den kvadrerade ekvationen dök en sk falsk rot upp. Det är mycket viktigt att känna till vilka operationer man får utföra över en ekvation så att dess lösningsmängd bevaras, och minst lika viktigt att veta vilka operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar.

Operationer som alltid leder till en ekvation ekvivalent med den givna är:

1. addera av samma tal/uttryck till båda sidor av likheten;
2. multiplikation/division av båda leden med ett tal/uttryck *skilt från 0*;
3. förenkling av de två sidorna av likheten var för sig.

Vanliga operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar, är:

1. förlängning/förkortning med uttryck *som skulle kunna vara lika med 0*;
2. kvadrering av båda leden.

Ett sätt att gardera sig mot falska lösningar är att sätta in de kandidater till lösningar man fått i den ursprungliga ekvationen och helt enkelt kontrollera att den verkligen omvandlas till en sann likhet. Det är svårare att gardera sig mot förlust av lösningar. Vi återkommer till ämnet i senare avsnitt.

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man alltså till att beskriva ett samband. Ofta innehåller den någonting som är obekant och i många fall är målet just att bestämma vad denna obekanta storlek är. I andra fall beskriver ekvationen något objekt, så t ex är  $y = 2x + 3$  ekvationen för en rät linje, dvs punkterna med koordinater lösningarna  $(x, y)$  till denna utgör en linje. Vi tar en titt på några exempel på problem som man kan ha nytta av en ekvation för att lösa.

**Exempel.** Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

*Lösning.* Vi betecknar Kals nuvarande ålder med  $x$ . Skillnaden mellan deras ålder är då  $21 - x$  och för 3 år sedan fyllde Kal  $x - 3$ . En ekvation som beskriver sambandet är alltså  $21 - x = x - 3$ . □

**Exempel.** Vi söker nu ett tal med den "magiska" egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

*Lösning.* Vi betecknar det okända talet med  $g$ . Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är  $g^2 - g$  och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen  $g^2 - g = 1$ . □

**Exempel.** Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

*Lösning.* Vi betecknar priset på chokladkakan med  $x$  och priset på en tablettask med  $y$ . Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då  $3x + 2y$ . Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen  $3x + 2y = 31$ .  $\square$

## 2.1 Förstegradsekvationer

Vi ska nu titta på hur man löser s k *linjära ekvationer*.

Man säger att en ekvation är *linjär* de obekanta endast förekommer som förstegrads-termer, d v s om det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal. Linjära ekvationer kallas också för förstegradsekvationer.

**Exempel.** Ekvationen  $21 - x = x - 3$  är linjär för den enda obekanta variabeln  $x$  har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak gäller för  $3x + 2y = 31$  där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen  $g^2 - g = 1$  inte linjär då den obekanta variabeln  $g$  här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen  $xy = 1$  är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra.  $\square$

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med 1 obekant som vi (av tradition) kallar  $x$ . Strategin är enkel: samla alla termer som innehåller  $x$  på en sida och alla tal på den andra.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $21 - x = x - 3$ :

$$21 - x = x - 3 \iff (21 - x) + x = (x - 3) + x \iff 21 = 2x - 3 \iff$$

$$21 + 3 = (2x - 3) + 3 \iff 24 = 2x \iff \frac{24}{2} = \frac{2x}{2} \iff 12 = x.$$

Här betyder dubbelpilen  $\iff$  att ekvationerna är ekvivalenta, d v s har exakt samma lösningsmängd. Vi ser alltså att den givna ekvationen har en enda lösning, nämligen  $x = 12$ . (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år gammal.)

Vi löser nu ekvationen  $21 + x = x - 3$ :

$$21 + x = x - 3 \iff (21 + x) - x = (x - 3) - x \iff 21 = -3.$$

Här försvann  $x$  och kvar fick vi bara orimligheten  $21 = -3$ . Inget  $x$  i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen  $12 - (x - 3) = 15 - x$ :

$$12 - (x - 3) = 15 - x \iff 12 - x + 3 = 15 - x \iff 15 - x = 15 - x \iff 15 = 15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid, så till denna ekvation är vilket reellt tal  $x$  som helst en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar.  $\square$

Vi såg i exemplet ovan att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar. Vi ska visa att detta faktiskt är de enda möjligheterna som finns. En linjär ekvation med en obekant kan alltid förenklas till formen  $ax = b$ . Om  $a \neq 0$  är det enda talet som satisfierar ekvationen  $x = \frac{a}{b}$ , d v s ekvationen har som det heter *unik* lösning. Om  $a = 0$  och  $b = 0$  så är varje reellt tal lösning till ekvationen, eftersom  $0 \cdot x = 0$  för alla reella  $x$ . I det fallet har ekvationen oändligt många lösningar. Den sista möjligheten är att  $a = 0$ , men  $b \neq 0$ . I det fallet finns ingen lösning, eftersom  $0 \cdot x = 0 \neq b$  för alla reella  $x$ .

Vi ska nu titta på en linjär ekvation med fler än 1 obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med  $x$  ovan.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $3x + 2y = 31$  genom att lösa ut  $y$ :

$$3x + 2y = 31 \iff (3x + 2y) - 3x = 31 - 3x \iff 2y = 31 - 3x \iff y = \frac{31 - 3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje  $x$  vi väljer så får vi precis ett  $y$  nämligen  $y = (31 - 3x)/2$ . Vi får alltså oändligt många lösningar. Två av dessa är  $x = 5, y = 8$  och  $x = 6, y = 13/2$ . (Vi påminner om att talparet  $x = 5, y = 8$  är *en* lösning.)

Denna ekvation var ju den vi fick i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns unik lösning och därför räcker inte informationen till att räkna ut vad godiset kostar per styck.  $\square$

Om man har en linjär ekvation med fler än 1 obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner vid förenkling).

### 2.1.1 Övningar

#### 2.1.1 Lös följande ekvationer.

a)  $3(2 - x) = -(1 + 2x)$

b)  $3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 10$

$$\text{c) } 3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 7 - 7x \quad \text{d) } 3(5 - 3x) - 2(4 - x) = 6 - 7x$$

$$\text{e) } \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$$

$$\text{f) } \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} + 2 \right) = \frac{2}{3}$$

**2.1.2** Lös ut  $y$  i följande ekvationer.

$$\text{a) } 3(2 - x) = -(1 + y)$$

$$\text{b) } 3(5 - 3y) - 2(4 - x) = 10 + 2y$$

## 2.2 Andragradsekvationer

En andragradsterm är en term i vilken den/de obekanta multiplicerats med varandra och med tal så att det sammanlagda gradtalet är två, t ex är  $2x^2$ ,  $3xy$ ,  $z^2$  andragradstermer, medan  $xy^2$ ,  $x^2y^2$  inte är det. En ekvation i vilken den/de obekanta förekommer endast som första- och andragradstermer kallas en *andragradsekvation*. I det här avsnittet ska vi arbeta med andragradsekvationer med en obekant.

Även andragradsekvationer förenklas genom att man adderar eller subtraherar samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicerar eller dividerar båda leden med tal ( $\neq 0$ ), eller gör omskrivningar. Syftet med förenklingarna och omskrivningarna är att få en ekvation som man klarar av att lösa och som är ekvivalent med den givna.

De enda andragradsekvationerna man kan lösa direkt är de som hör till den enklaste typen,  $x^2 = d$  där  $d$  är ett positivt tal. Vi har ju att  $\sqrt{d}$  är det positiva tal vars kvadrat är  $d$ ,  $(\sqrt{d})^2 = d$  om  $d > 0$ . Eftersom det också gäller att  $(-\sqrt{d})^2 = d$  så har ekvationen de två lösningarna  $\sqrt{d}$  och  $-\sqrt{d}$ . Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till lite längre fram. T ex har ekvationen  $x^2 = 9$  de två lösningarna  $x_1 = \sqrt{9} = 3$  och  $x_2 = -3$ . Om  $d$  skulle vara lika med 0, får vi endast lösningen  $x = 0$ .

**Exempel.** Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna då arean är  $54 \text{ m}^2$ .

*Lösning.* Om kortsidan är  $2a$  m så är långsidan  $3a$  m och arean  $6a^2 \text{ m}^2$ . Alltså skall  $a$  vara lösning till  $6a^2 = 54$ . Division med 6 ger  $a^2 = 9$  vars lösningar är 3 och  $-3$ . Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m.  $\square$

Vi klarar nu också av att lösa andragradsekvationer av typen  $(x - s)^2 = d$  där  $d$  är ett positivt tal. Här är  $x - s$  ett tal vars kvadrat är  $d$ . Då är  $x - s = \sqrt{d}$  eller  $x - s = -\sqrt{d}$ . Lösningarna till  $(x - s)^2 = d$  är således

$$x_1 = s + \sqrt{d} \text{ och } x_2 = s - \sqrt{d}.$$

**Exempel.** Ekvationen  $(x - 2)^2 = 9$  har de två lösningarna som ges av  $x - 2 = \sqrt{9} = 3$  och  $x - 2 = -\sqrt{9} = -3$ . Alltså är  $x_1 = 5$  och  $x_2 = -1$ .  $\square$

**Exempel.** Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Bestäm sidlängderna då arean är  $55 \text{ m}^2$ .

*Lösning.*

Antag att kortsidan är  $x$  m. Då är långsidan  $x + 6$  m och arean  $x(x + 6) \text{ m}^2$ . Vi söker således en lösning till ekvationen  $x(x + 6) = 55$ . Utveckling ger

$$x(x + 6) = 55 \iff x^2 + 6x = 55.$$

Genom att addera 9 till vänsterledet  $x^2 + 6x$  blir uttrycket en jämn kvadrat

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Vi adderar därför 9 till båda sidor av ekvationen och får

$$\begin{aligned} x(x + 6) = 55 &\iff x^2 + 6x = 55 \iff x^2 + 6x + 9 = 55 + 9 \iff (x + 3)^2 = 64 \\ &\iff x + 3 = 8 \text{ eller } x + 3 = -8 \iff x = 5 \text{ eller } x = -11. \end{aligned}$$

Eftersom endast positiv lösning är möjlig så får vi  $x = 5$ . Sidorna är med andra ord 5 respektive 11 m.  $\square$

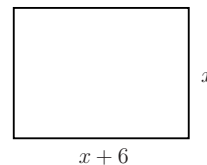
Metoden i det sista exemplet kallas *kvadratkomplettering*. Genom att addera en kvadrat med arean  $9 \text{ m}^2$  gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan  $x + 3$ . Rektangeln har arean  $55 \text{ m}^2$ , kvadraten har arean  $64 \text{ m}^2$ .

På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragsuttryck. Uttrycket

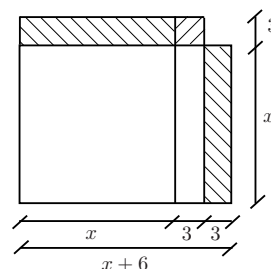
$$x^2 + 2rx = x(x + 2r)$$

kan ses som arean av en rektangel med sidorna  $x$  och  $x + 2r$ . Genom att addera en kvadrat med sidan  $r$  erhåller man en kvadrat med sidan  $x + r$ .

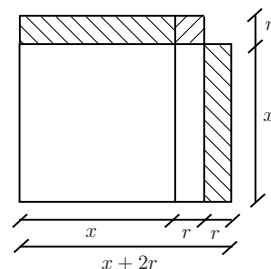
Rent algebraiskt betyder kvadratkomplettering att vi, givet ett uttryck på formen  $x^2 + bx$ , försöker hitta ett tal vi kan addera, så att summan blir en jämn kvadrat. Eftersom  $(x + s)^2 = x^2 + 2sx + s^2$ , får vi att  $2s$  måste vara lika med  $b$  och rätt tal att addera är  $\frac{b^2}{4}$ .



Figur 1: Rektangel med sidorna  $x$  och  $x + 6$



Figur 2: En kvadrat med sida 3 läggs till



Figur 3: En kvadrat med sida  $r$  läggs till

Med hjälp av kvadratkomplettering härleder vi nu en välkänd formel för lösningarna till vilken andragradsekvation som helst. Vi ska först titta på ekvationer där koefficienten framför  $x^2$  är lika med 1.

$$\begin{aligned}x^2 + px + q = 0 &\iff x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x = -q \\&\iff x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\&\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\&\iff x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \text{ eller } x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\end{aligned}$$

som ger:

Andragradsekvationen  $x^2 + px + q = 0$  har för  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$  lösningarna

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{och} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Resultatet ovan har du säkert använt många gånger. Ofta skrivs det med *en* formel:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Den är inte svår att memorera, men minnet blir lätt diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre att kunna kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Kvadratkomplettering är dessutom en metod som används i flera andra sammanhang och har ett värde i sig. Tecknet  $\pm$  är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

**Exempel.** Vi löser två andragradsekvationer genom att använda formeln vi precis härledde.

a Ekvationen  $x^2 + 6x + 5 = 0$  har rötterna

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 5} = -3 \pm \sqrt{9 - 5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$$

d v s  $x_1 = -3 + 2 = -1$  och  $x_2 = -3 - 2 = -5$ .

b Om man vill använda formeln ovan när koefficienten framför  $x^2$  inte är lika med 1 (men är skild från 0), måste man först dividera med den koefficienten.

Ekvationen  $6 + 3x - 4x^2 = 0$  har koefficienten  $-4$  framför  $x^2$ , så för att använda formeln måste vi först dividera med  $-4$  vilket ger

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Denna har lösningarna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{105}}{8}.$$

Alltså är  $x_1 = (3 + \sqrt{105})/8$  och  $x_2 = (3 - \sqrt{105})/8$ . □

Vi ska nu härleda en formel som ger andragradsekvationens lösningar i det allmänna fallet, samt diskutera hur man lätt kan bestämma antalet reella lösningar. Betrakta ekvationen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{där } a \neq 0.$$

Division av båda leden med  $a \neq 0$  och kvadratkomplettering ger ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

som är ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Uttrycket  $D = b^2 - 4ac$  kallas *ekvationens diskriminant* och dess tecken avgör hur många reella lösningar den givna andragradsekvationen har. För att ekvationen ska ha reella lösningar måste högerledet ovan vara icke-negativt. Eftersom nämnaren  $4a^2$  alltid är positiv, betyder det att ekvationen har reella lösningar om och endast om  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ . Vi sammanfattar:

| Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har |                                        |
|----------------------------------------------|----------------------------------------|
| två olika reella lösningar                   | om och endast om $D = b^2 - 4ac > 0$ ; |
| en reell lösning                             | om och endast om $D = b^2 - 4ac = 0$ ; |
| inga reella lösningar                        | om och endast om $D = b^2 - 4ac < 0$ . |

Låt oss titta igen på uttrycket vi fick genom att kvadratkomplettera

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

För  $D \geq 0$  kan vi använda konjugatregeln för att faktorisera, och får att den givna andragradsekvationen är ekvivalent med

$$\left( \left( x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0.$$

Eftersom en produkt endast blir noll då en eller flera av faktorerna är lika med noll, kan vi avläsa andragradsekvationens lösningar. (Vi ser också att det inte kan finnas fler än två lösningar.)

Andragradsekvationen  $ax^2 + bx + c = 0$  har för  $D = b^2 - 4ac \geq 0$  de reella lösningarna

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{och} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

För  $D > 0$  är de två reella lösningarna olika och den faktorerade ekvationen har utseendet  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ; för  $D = 0$  får vi samma lösning två gånger ( $x_1 = x_2$ ) och faktoriseringen ger  $(x - x_1)^2 = 0$ . Det finns anledning att betrakta den enda reella lösningen som två reella lösningar som råkar sammanfalla. Man säger att ekvationen för  $D = 0$  har en *dubbelrot*, eller, vilket är samma sak, att  $x_1$  i det fallet har *multiplicitet två*.

Om man får en ekvation där faktoriseringen redan är gjord finns det ingen anledning att utveckla uttrycket för att sedan använda kvadratkomplettering eller någon lösningsformel. Man kan i det fallet avläsa lösningarna direkt.

**Exempel.** Ekvationen  $(x - 1)(x + 3) = 0$  har de två lösningarna  $x_1 = 1$  och  $x_2 = -3$ . Detta förklaras alltså av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten  $(x - 1)(x + 3)$  är 0 precis då  $x - 1 = 0$  eller  $x + 3 = 0$  vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen  $x^2 + px = 0$  har de två lösningarna  $x_1 = 0$  och  $x_2 = -p$ , eftersom  $x^2 + px = x(x + p)$ .  $\square$

Notera att ur faktoriseringen följer

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

## 2.2.1 Övningar

### 2.2.1 Lös ekvationerna

- a)  $x^2 + 3x - 4 = 0$       b)  $3 + 2x - x^2 = 0$       c)  $2x^2 = 3 + x$   
d)  $3x + 7x^2 = 0$       e)  $4x^2 + 9 = 12x$       f)  $5x^2 + 3x = 1$

### 2.2.2 Kvadratkomplettera

- a)  $x^2 + 4x + 1$       b)  $4x^2 - 36x + 100$       c)  $3 - 12x - x^2$

### 2.2.3 Faktoruppdelning (med reella tal)

- a)  $x^2 + x - 6$       b)  $8 - 6x - 2x^2$   
c)  $x^2 - x - 1$       d)  $x^2 + x + 1$

### 2.2.4 Bestäm en andragradsekvation med rötterna

- a) 2 och  $-5$       b)  $-\frac{1}{2}$  och  $\frac{2}{3}$       c)  $1 + \sqrt{5}$  och  $1 - \sqrt{5}$

## 2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en omskrivning av något slag. Det är dock viktigt att tänka sig för när man gör omskrivningar. Som vi har noterat tidigare kan det nämligen inträffa både att man skapar nya *falska* lösningar (*falska* rötter) och att man tappar bort lösningar.

Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få nya lösningar. Ekvationen  $(x - 1)(x - 2) = 0$  har lösningarna  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 2$ . Om vi multiplicerar med  $x - 3$  får vi ekvationen  $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$  som har ytterligare en, nämligen  $x_3 = 3$ .

På samma sätt leder ofta division till att lösningar tappas bort. Ekvationen  $x^2 + 4x = 0$  har lösningarna  $x_1 = 0$  och  $x_2 = -4$ . Division med  $x$  leder till ekvationen  $x + 4 = 0$ , lösningen  $x_1 = 0$  har tappats bort.

Det är därför viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta. Man ska alltid ställa sig frågan: När är det jag dividerar med lika med 0? Ett gott råd är att inte förkorta med annat än tal. Om man ser en gemensam faktor i alla termer kan man istället flytta över alla termer till ena ledet och bryta ut den gemensamma faktorn.

För ekvationer som innehåller rationella uttryck är det en bra idé att skriva alla uttryck med minsta gemensamma nämnare. Om man förlänger med den gemensamma nämnaren gäller det att vara medveten om att detta kan introducera falska rötter.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $x - \frac{8}{x+2} = 0$ .

*Lösning.* Ekvationen innehåller ett rationellt uttryck och vi multiplicerar därför med nämnaren  $x + 2$ . Lösningarna till den nya ekvationen  $x(x + 2) - 8 = 0$  bestäms med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x(x + 2) - 8 = 0 &\iff x^2 + 2x = 8 \iff x^2 + 2x + 1 = 9 \\ &\iff (x + 1)^2 = 9 \iff x_{1,2} = -1 \pm 3. \end{aligned}$$

Lösningarna är alltså  $x_1 = 2$  och  $x_2 = -4$ . Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med  $x + 2$  är enda möjliga falska roten  $-2$ . Kontrollen var logiskt sett överflödig, men man bör *alltid* kontrollera genom insättning. Det är också ett sätt att upptäcka räknefel.)  $\square$

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras, eventuellt upprepade gånger. Detta bygger på att om  $a$  och  $b$  är positiva tal och  $b = \sqrt{a}$  så är  $b^2 = a$ . Notera att om  $b$  är ett negativt tal och  $b = -\sqrt{a}$  så är också  $b^2 = a$ . Den kvadrerade ekvationen *kan* därmed ha fler lösningar än den givna.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $\sqrt{2x + 143} = x$ .

*Lösning.* Vi noterar först att eftersom  $\sqrt{2x + 143} \geq 0$  så måste  $x \geq 0$ . Båda leden kvadreras. Den nya ekvationen  $2x + 143 = x^2$  skrivs om till

$$x^2 - 2x - 143 = 0.$$

Denna har lösningarna  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{144} = 1 \pm 12$ . Roten  $x_1 = 13$  är rot till givna ekvationen eftersom  $\sqrt{2 \cdot 13 + 143} = \sqrt{169} = 13$ . Däremot är  $x_2 = -11$  en *falsk rot*, eftersom vi redan från början noterade att det är nödvändigt att  $x \geq 0$ . Denna falska rot fås p g a kvadreringen och är lösning till  $\sqrt{2x + 143} = -x$ .  $\square$

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $1 + \sqrt{x^2 + 5} = 2x$ .

*Lösning.* För att vid kvadrering bli av med ett rotuttryck så måste detta vara ensamt på ena sidan i ekvationen. Vi skriver därför ekvationen som  $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$  (och noterar att eventuella lösningar måste uppfylla  $2x - 1 \geq 0$ ). Kvadrering ger  $x^2 + 5 = (2x - 1)^2$  som utvecklas till  $x^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 1$ , dvs

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Lösningarna är  $x_1 = 2$  och  $x_2 = -2/3$ . Nu måste provning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller *hellre* genom provning i ekvationen  $\sqrt{x^2 + 5} = 2x - 1$ , varvid *endast tecknet behöver provas*, eftersom  $q^2 = p \iff q = \sqrt{p}$  eller  $q = -\sqrt{p}$ :

För  $x_1 = 2$  får vi *högerledet*

$$HL = 2x - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0,$$

så  $x_1 = 2$  är en lösning till den givna ekvationen. För att upptäcka eventuella räknefel kan vi kontrollera även vänsterledet. Vi får

$$VL = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

vilket bekräftar att  $x_1 = 2$  är en lösning till den givna ekvationen.

För  $x_2 = -2/3$  får vi

$$HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 < 0,$$

alltså är  $x_2 = -2/3$  en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten  $x_1 = 2$ . □

Flera olika typer av ekvationer, t ex fjärdegradsekvationer som saknar  $x$ - och  $x^3$ -termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga *substitutioner*.

En fjärdegradsekvation som saknar  $x$ - och  $x^3$ -termer, d v s en ekvation på formen

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

kan med substitutionen  $x^2 = t$  överföras till en andragradsekvation för  $t$

$$at^2 + bt + c = 0.$$

För varje icke-negativ lösning  $t$  till denna andragradsekvation får vi för fjärdegradsekvationen de reella lösningarna  $x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$ , ty  $x^2 = t$ .

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ .

*Lösning.* Sätt  $x^2 = t$ . Då fås  $t^2 - 20t + 64 = 0$  som har lösningar

$$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6, \text{ d v s } t_1 = 16 \text{ och } t_2 = 4.$$

Eftersom vi satte  $t = x^2$ , så får vi att  $x^2 = t_1 = 16$  ger  $x_1 = 4$  och  $x_2 = -4$ , samt att  $x^2 = t_2 = 4$  ger  $x_3 = 2$  och  $x_4 = -2$ . Ekvationen  $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$  har alltså fyra reella lösningar och de är 4, -4, 2 och -2. □

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $x + \sqrt{x} = 6$ .

*Lösning.* Sätt  $\sqrt{x} = t$ . Då fås  $t^2 + t = 6$  vars lösningar är

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \text{ så } t_1 = 2 \text{ och } t_2 = -3.$$

Vi satte  $t = \sqrt{x}$ , så  $\sqrt{x} = t_1 = 2 \Rightarrow x = 4$ , medan  $\sqrt{x} = t_2 = -3$  är orimligt.

Den givna ekvationen har en enda lösning,  $x = 4$ . □

### 2.3.1 Övningar

2.3.1 Lös ekvationerna.

a)  $x + 3 = 4 \cdot x^{-1}$       b)  $x + 9x^{-1} = 12$       c)  $3 + x^{-2} = x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna.

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$       b)  $x + 1 + \frac{1}{x+1} = 0$

2.3.3 Lös ekvationerna genom kvadrering.

a)  $x - 6 = \sqrt{x}$       b)  $x + 1 = \sqrt{x^2 + 5}$       c)  $x - 2 = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$   
d)  $3 + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2x$       e)  $x + 2\sqrt{x} = 8$   
f)  $\sqrt{x + 132} = x$       g)  $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+6} - x = 3$   
h)  $2x + \sqrt{x^2 + x} = 1$       i)  $\sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-5}$

2.3.4 Lös ekvationerna.

a)  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$       b)  $1225 - 74x^2 + x^4 = 0$   
c)  $x^4 - x^2 - 12 = 0$       d)  $24x^2 = 72 + 2x^4$   
e)  $6x^4 = 7x^2 + 3$

2.3.5 Lös ekvationerna med substitution.

a)  $x - 6 = \sqrt{x}$       b)  $x + 6\sqrt{x} = 1$       c)  $x + 2 = 3\sqrt{x}$

## 2.4 Linjära ekvationssystem

Ett *ekvationssystem* är ett antal ekvationer med (oftast) flera obekanta som man vill lösa samtidigt, d v s man vill hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt. Precis som för enskilda ekvationer finns ett antal operationer som garanterat leder till ekvationssystem ekvivalenta med det givna, d v s ekvationssystem som har exakt samma lösningar som det givna. Dessa operationer är

1. Omkastning av två ekvationers ordningsföljd;
2. Multiplikation av en ekvation med tal skilt från 0;
3. Addition av en ekvation multiplicerad med ett tal till en annan ekvation.

Man kan använda sig av dessa operationer för att förenkla och omarbeta vilket ekvationssystem som helst. Det visar sig att de är tillräckliga för att lösa en speciell typ av ekvationssystem, nämligen *linjära* sådana. Ett ekvationssystem kallas *linjärt* om alla ekvationer det består av är linjära, d v s de obekanta förekommer endast i form av förstgradstermer.

När man skall lösa ett sådant system försöker man med hjälp av operationerna listade ovan skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta, om det är två variabler. Om det är fler än två variabler får man upprepa förfarandet för en annan obekant. Metoden kallas *Gauss eliminationsmetod*, eller *eliminationsmetoden*.

**Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1. \end{cases}$$

*Metod 1: (Substitutionsmetoden)* Man kan lösa ut  $x$  i den första ekvationen och få

$$x = \frac{5 - 2y}{3}.$$

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7 \cdot \left( \frac{5 - 2y}{3} \right) + 3y = 1 \iff 35 - 14y + 9y = 3 \iff 32 = 5y$$

och därmed  $y = 32/5$  och  $x = (5 - 2y)/3 = -13/5$ .

*Metod 2: (Eliminationsmetoden)* Multiplicera (för att eliminera  $x$ ) de givna ekvationerna med 7 respektive  $-3$  och addera den nya första ekvationen till den nya som är

på andra plats:

$$\begin{cases} 21x + 14y = 35 \\ -21x - 9y = -3 \end{cases} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 5y = 32$$

Här får man  $y = 32/5$ , som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger  $x = -13/5$ .

Svar: Vi får lösningen  $x = -13/5$  och  $y = 32/5$

□

**Anmärkning 1.** Eliminationsmetoden är att föredra, eftersom den leder till mer systematiska lösningar och är enkel att använda även för mycket stora linjära ekvationssystem, d v s ekvationssystem som består av många linjära ekvationer med många obekanta.

**Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

Vi inleder med att låta ekvationer 1 och 2 byta plats; sedan elimineras  $x$  ur alla ekvationer utom den nya första genom att man multiplicerar den nya första ekvationen med  $(-4)$  och adderar till den nya andra ekvationen, samt med  $(-3)$  och adderar till den tredje:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ -15y - 2z = 5 \\ -10y - 2z = 6. \end{cases}$$

Nu multiplicerar vi den tredje ekvationen med  $-\frac{1}{2}$  och låter den byta plats med den andra:

$$\begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ -15y - 2z = 5 \\ -10y - 2z = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ 5y + z = 3 \\ -15y - 2z = 5. \end{cases}$$

Vi kan nu eliminera  $y$  ur den sista ekvationen genom att multiplicera den andra med 3 och addera till den sista:

$$\begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ 5y + z = 3 \\ -15y - 2z = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + z = -1 \\ 5y + z = 3 \\ z = -4. \end{cases}$$

Ur den sista ekvationen får vi att  $z = -4$ . Vi sätter in i den andra och får att  $y = \frac{-3+4}{5} = \frac{1}{5}$ . Slutligen sätter vi in värdena för  $y$  och  $z$  i den första ekvationen och får att  $x = \frac{11}{5}$ . □

**Anmärkning 2.** I det första exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5y = 32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är *triangulärt*, d v s koefficienterna för  $x$  och  $y$  som är skilda från noll bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning. I det andra exemplet eftersträvades också en triangulär form, även kallad *trappstegsform*.

**Anmärkning 3.** Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar först. Man kan börja med den som man tycker leder till de enklaste uttrycken. Variablerna kan ha andra namn än  $x$  och  $y$ , t ex är det vanligt att man använder sig av index om det handlar om stora ekvationssystem med många obekanta. I ett ekvationssystem med hundra obekanta heter de typiskt  $x_1, x_2, \dots, x_{99}, x_{100}$ .

**Exempel.** Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 4y = 9. \end{cases}$$

*Lösning.* Multiplicera (för att eliminera  $x$ ) den första ekvationen med  $-2$  och addera till den andra:

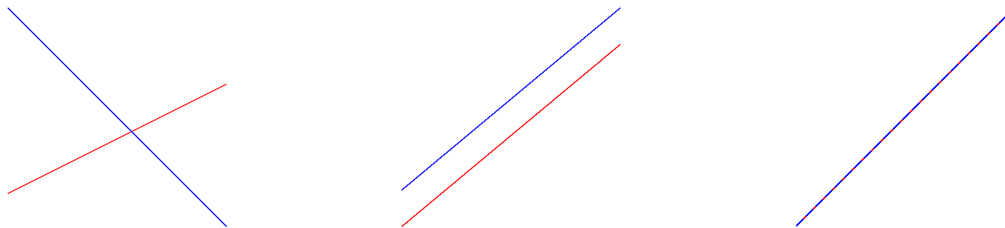
$$\begin{array}{rcl} -6x - 4y & = & -10 \\ 6x + 4y & = & 9 \\ \hline 0 & = & -1 \end{array}$$

Här får vi en motsägelse som betyder att ekvationssystemet saknar lösning. □

**Anmärkning 4.** Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen  $ax + by = c$  en *rät linje*. (Här är  $a, b, c$  fasta parameter och  $x, y$  variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar alltså skärningspunkterna mellan två räta linjer. Detta har därmed

- en lösning om de räta linjerna är *skärande*,
- ingen lösning om de räta linjerna är *parallella* (och olika),

- oändligt många lösningar om de räta linjerna *sammanfaller*.



Hade vi istället betraktat ett linjärt ekvationssystem med tre ekvationer och två obekanta hade det rört sig om att hitta skärningspunkterna mellan tre räta linjer. Man förväntar sig inte att ett sådant ekvationssystem är lösbart. Det skulle dock också kunna ha en entydig lösning, om alla linjerna är olika och går genom en punkt, eller oändligt många lösningar, om de tre linjerna sammanfaller.

Det visar sig att ett linjärt ekvationssystem har ingen, en unik, eller oändligt många lösningar oavsett antalet ekvationer och obekanta.

## 2.4.1 Övningar

### 2.4.1 Lös ekvationssystemen.

- a)  $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x + 5y = -4 \end{cases}$
- d)  $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 9x - 6y = 8 \end{cases}$       e)  $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 10x + 2y = 6 \end{cases}$
- f)  $\begin{cases} 15s + 14t = 59 \\ 12s - 35t = 1 \end{cases}$       g)  $\begin{cases} 1/x + 1/y = 5/6 \\ 1/x - 1/y = 1/6 \end{cases}$
- h)  $\begin{cases} 6x + 5y + z = 45 \\ 5x + 2y - z = 23 \\ 13x - 7y + z = 6 \end{cases}$       i)  $\begin{cases} 2x - y + z = 20,1 \\ x + y - z = 9,9 \\ 3x + 2y + 8z = 30,4 \end{cases}$
- j)  $\begin{cases} a + 2b + c = 3 \\ a - b + 2c = 2 \\ 3a - 2b + c = -3 \end{cases}$       k)  $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$

**2.4.2** En person som tillfrågades om sin ålder svarade: "För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal." Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår.)

## 2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Ett *polynom* är en (ändlig) summa av termer på formen  $ax^n$ , där *koefficienten*  $a$  är ett tal, *exponenten*  $n \geq 0$  ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) samt  $x$  en variabel. Den högsta exponenten  $n$  med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för *graden av polynomet*. (Istället för  $x$  kan man förstås använda en annan variabel om man så vill.)

Vi låter  $p(x)$  beteckna ett polynom och  $a$  ett tal. *Värdet i en punkt*  $a$  för polynomet är  $p(a)$ , d v s det tal vi får när vi ersätter  $x$  med  $a$ . Ett *nollställe* till polynomet är ett tal  $b$  sådant  $p(b) = 0$ .

**Exempel.** När vi löste andragradsekvationer så letade vi efter nollställena till uttryck på formen  $ax^2 + bx + c$ , d v s nollställena till polynom av grad 2. Uttrycket  $x^4 + 3x^3 + x$  är ett polynom av grad 4.

Däremot är **inte** uttrycken  $x^2 + x^{-1} + 1$  eller  $x^2 + \sqrt{x} + 1$  några polynom, eftersom exponenten i den andra termen i båda fallen inte är ett naturligt tal.  $\square$

**Exempel.** Låt  $p(x) = x^2 + 3x + 2$ . Värdet i 2 är då  $p(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$  och värdet i  $-1$  är  $p(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0$ . Alltså är  $-1$  ett nollställe till polynomet.  $\square$

I avsnittet om andragradsekvationer insåg vi att  $x_1, x_2$  är nollställena till polynomet  $x^2 + px + q$  om och endast om  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ . Det finns ett generellt viktigt samband mellan nollställena till ett polynom och faktorer till polynomet. Följande sats är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom.

**Faktorsatsen:** Antag att  $p(x)$  är ett polynom och  $a$  ett tal. Då är  $a$  ett nollställe till  $p(x)$ , d v s  $p(a) = 0$ , om och endast om  $x - a$  är en faktor i  $p(x)$ , d v s om och endast om

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

där  $q(x)$  är ett polynom med grad ett mindre än  $p(x)$ .

**Exempel.** Vi såg i exemplet ovan att  $-1$  är ett nollställe till polynomet  $p(x) = x^2 + 3x + 2$ . Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1)) \cdot q(x) = (x + 1) \cdot q(x),$$

där  $q(x)$  är ett polynom av grad  $2-1=1$ . Alltså är  $q(x) = kx + m$  för några tal  $k$  och  $m$ . Vi kan räkna ut vad  $q(x)$  är genom att utnyttja likheten

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= (x + 1) \cdot q(x) = (x + 1)(kx + m) \\ &= kx^2 + kx + mx + m = kx^2 + (k + m)x + m. \end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienterna för  $x^2$  får vi  $k = 1$  och om vi identifierar konstanterna så får vi  $m = 2$ . En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för  $x$  är 3 respektive  $k + m = 1 + 2 = 3$ . Alltså är

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

och alltså är också  $-2$  ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just  $x + 2$  direkt i huvudet?)  $\square$

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för *kort division*. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen precis som man gör för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

**Exempel.** Vi tittar på tredjegradspolynomet  $x^3 - 9x + 10$ . Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty  $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$ . Därmed vet vi enligt faktorsatsen att  $x - 2$  är en faktor och att  $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot q(x)$ , där  $q(x)$  är ett andragsgradspolynom.

Vi bestämmer först  $q(x)$  med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c.$$

Koefficienten framför  $x^3$  ger  $a = 1$  och konstanten ger  $10 = -2c$  så  $c = -5$ . Koefficienten framför  $x^2$  ger nu  $0 = -2a + b = -2 + b$  så  $b = 2$ . Kontroll med koefficienten framför  $x$  ger  $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$  vilket stämmer alldeles utmärkt. Vi får alltså

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(x^2 + 2x - 5).$$

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande exponenten.

|                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
|                            | $x^2$                      | $x^2 + 2x$                 | $x^2 + 2x - 5$             |
| $x^3 - 9x + 10$            | $x^3 - 9x + 10$            | $x^3 - 9x + 10$            | $x^3 - 9x + 10$            |
| $\overline{) \quad x - 2}$ | $\overline{) \quad x - 2}$ | $\overline{) \quad x - 2}$ | $\overline{) \quad x - 2}$ |
|                            | $-x^2(x-2)$                | $-x^2(x-2)$                | $-x^2(x-2)$                |
|                            | $\hline 2x^2 - 9x + 10$    | $\hline 2x^2 - 9x + 10$    | $\hline 2x^2 - 9x + 10$    |
|                            |                            | $-2x(x-2)$                 | $-2x(x-2)$                 |
|                            |                            | $\hline -5x + 10$          | $\hline -5x + 10$          |
|                            |                            |                            | $\hline -(-5)(x-2)$        |
|                            |                            |                            | $\hline 0$                 |

I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen,  $x$ , i nämnaren i högsta termen i täljaren dvs  $x^3$ . Jo, den går  $x^2$  gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan  $x^2(x - 2)$  ifrån täljaren och får  $2x^2 - 9x + 10$ . Nu frågar vi oss hur många gånger

går högsta termen,  $x$ , i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s  $2x^2$ . Jo, den går  $2x$  gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan  $2x(x - 2)$  ifrån återstoden av täljaren och får  $-5x + 10$ . Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen,  $x$ , i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren d v s  $-5x$ . Jo, den går  $-5$  gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan  $-5(x - 2)$  ifrån återstoden av täljaren och får  $0$ . Därmed ser vi att resten blir  $0$  (det visste vi ju redan) och kvoten blir  $x^2 + 2x - 5$ .  $\square$

Man kan utföra polynomdivision även när den inte går jämnt ut. Precis som för tal handlar det då om att givet två polynom  $p$  och  $k$  framställa  $p$  på formen  $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$ , där  $q$  kallas *kvot* och  $r$  kallas *rest* vid divisionen. Vid heltalsdivision av naturliga tal krävdes att resten skulle vara mindre än det tal man dividerar med. Motsvarande krav för polynomdivision är att *restens gradtal är mindre än gradtalet för det polynom man dividerar med*, d v s att  $r$ 's gradtal är mindre än  $k$ 's gradtal i beteckningarna ovan. Om  $p$  är av grad  $n$  och  $k$  är av grad  $m$ , där  $n \geq m$ , så är  $q$  av grad  $n - m$ . För  $n < m$  är  $q$  konstanten  $0$  och  $r = p$ . Vid division med ett förstgradspolynom är resten alltid konstant.

**Exempel.** Låt  $p(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2$  och  $k(x) = x^2 + x + 1$ . Polynomdivision ger att

$$2x^4 + 6x^2 + 2 = (x^2 + x + 1)(2x^2 - 2x + 6) + (-4x - 4).$$

Kvoten av polynomdivisionen av  $p(x) = 2x^4 + 6x^2 + 2$  med  $k(x) = x^2 + x + 1$  är alltså  $q(x) = 2x^2 - 2x + 6$ , och resten är  $-4x - 4$ .  $\square$

Faktorsatsen kan användas för att förkorta uttryck som är en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor till de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

**Exempel.** Förkorta

$$\frac{x^3 - x}{x^3 + 5x^2 - 6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn  $x$  ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till  $(x - 1)(x + 1)$ . För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om  $1$  eller  $-1$  är ett nollställe till  $x^2 + 5x - 6$ . Vi finner att  $1$  är ett nollställe och faktorerar (med kort division som ovan)  $x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(x + 6)$ . Därmed kan vi förkorta bort  $x - 1$  och får till slut

$$\frac{x + 1}{x + 6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det ursprungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla  $x$  utom  $x = 0$  och  $x = 1$ . För dessa två värden är ju inte det ursprungliga uttrycket definierat.  $\square$

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi redan en allmän metod för att hitta nollställena, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom  $p(x)$  som vi vill hitta alla nollställena till och antag också att vi känner till att  $a$  är ett nollställe. Då är  $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$  där  $q(x)$  är ett andragradspolynom. Ett nollställe till  $p(x)$  är nu ett nollställe till antingen  $x - a$  eller till  $q(x)$ . För att hitta övriga nollställena till  $p(x)$  så ska vi alltså hitta nollställena till andragradspolynomet  $q(x)$  vilket vi vet hur man gör.

**Exempel.** Vi löser ekvationen  $x^3 - 9x + 10 = 0$ . Vi såg i ett tidigare exempel att  $x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(x^2 + 2x - 5)$ , så att  $x_1 = 2$  är en lösning och eventuella andra lösningar måste vara nollställena till  $x^2 + 2x - 5$ . Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Lösningarna är alltså  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1 + \sqrt{6}$  och  $x_3 = -1 - \sqrt{6}$ .  $\square$

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter.

Antag att vi har ett polynom  $x^3 + cx^2 + bx + a$  där alla koefficienter är heltal. Om  $x_1$  är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen  $a$  är en multipel av  $x_1$ . Samma sak gäller för polynom  $x^n + \dots + bx + a$  av vilken grad  $n$  som helst.

Med andra ord är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen  $a$ . Det är lätt att inse varför: om  $x_1$  är ett nollställe till polynomet så har vi att  $a = -x_1(x_1^{n-1} + \dots + b)$ , vilket visar att  $x_1$  är en faktor i  $a$  och därmed att  $a$  är delbart med  $x_1$ . Ungefär på samma sätt kan man visa ett liknande påstående om eventuella rationella nollställena till polynom med heltalskoefficienter.

Antag att vi har ett polynom  $cx^n + \dots + bx + a$  där alla koefficienter är heltal. Om  $x_1 = \frac{p}{q}$  är ett rationellt nollställe till polynomet och  $p$  och  $q$  är relativt prima, så gäller att konstanttermen  $a$  är en multipel av  $p$  och koefficienten framför den högsta potensen  $c$  är en multipel av  $q$ .

Observera att man i båda fallen säger att *om* det finns en heltalslösning, eller en rationell lösning till ekvationen  $p(x) = 0$ , så måste denna uppfylla vissa villkor. Det finns ingen som helst garanti för att en sådan lösning existerar. Vad vi har är alltså endast ett sätt att göra kvalificerade gissningar.

**Exempel.** Vi tittar på polynomet  $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ . Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställena blir alltså  $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$ . Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställena nämligen  $\{1, -1, 2, -3\}$ . Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3). \quad \square$$

**Exempel.** Om vi tittar på ekvationen  $x^2 - 2 = 0$  inser vi att om den har rationella lösningar så måste dessa vara bland talen  $\pm 1, \pm 2$ . Inget av dessa tal är dock en lösning, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

□

**Exempel.** Vi letar efter rationella nollställena till  $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$ . Om det alls finns sådana så måste de vara på formen  $\frac{p}{q}$ , där  $p$  är en delare till 1 och  $q$  är en delare till 3.

De enda möjligheterna är alltså  $\frac{1}{3}$  och  $-\frac{1}{3}$ . Insättning ger att  $\frac{1}{3}$  är ett nollställe till det givna polynomet.

□

Om ett polynom  $p(x)$  har samma faktor  $(x - a)$  två gånger så säger man att  $a$  är en *dubbelrot* till ekvationen  $p(x) = 0$  (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot osv). Antalet faktorer  $(x - a)$  i polynomets faktorisering kallas *nollställets multiplicitet*.

**Exempel.** Lös ekvationen  $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$ .

*Lösning:* Först löses ekvationen  $x^2 - 2x - 7 = 0$ , som har rötterna  $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$ . Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2(x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så  $1 + 2\sqrt{2}$  och  $1 - 2\sqrt{2}$  är dubbelrötter. □

Det är naturligt att ställa sig frågan om det för polynom av godtycklig grad går att härleda formler som uttrycker polynomets nollställena i termer av dess koefficienter, analogt med de formler vi härledde för nollställena till ett andragradspolynom. Svaret är att det låter sig göras för polynom av grad tre och fyra, medan det inte finns sådana

formler för polynom av grad fem eller högre. Det sista ska inte tolkas som att ingen ännu har kommit på hur man ska lösa generella femtegradsekvationer. Det är *bevisat* att lösningsformler inte existerar för polynomekvationer av grad högre än fyra<sup>1</sup>.

### 2.5.1 Övningar

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a)  $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$

b)  $\frac{x^3 - 4x}{x^4 - 7x^2 + 6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a)  $x^3 + 3x^2 + x = 0$

b)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

c)  $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$

d)  $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a)  $(x - 1)^3 = 0$

b)  $x^3 - 1 = 0$

c)  $(x^2 - 1)^3 = 0$

2.5.4 Faktoruppdelning följande polynom.

a)  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b)  $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$

c)  $6 + 3x^2 - 5x - x^3$

## Facit

2.1.1 (a)  $x = 7$

(b)  $x = -\frac{3}{7}$

(c) Alla tal.

(d) Inga lösningar.

(e)  $\frac{5}{4}$

(f)  $-\frac{4}{3}$

2.1.2 (a)  $y = 3x - 7$

(b)  $y = \frac{2x - 3}{11}$

---

<sup>1</sup>Lösningsformlerna för tredje- och fjärdegradsekvationer är så komplicerade att de i praktiken är oanvändbara.

- 2.2.1 (a) 1 och  $-4$  (b)  $-1$  och  $3$  (c)  $-1$  och  $\frac{3}{2}$
- (d)  $0$  och  $-\frac{3}{7}$  (e)  $\frac{3}{2}$
- (f)  $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$  och  $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$  (g)  $-\frac{3+\sqrt{29}}{10}$  och  $-\frac{3-\sqrt{29}}{10}$
- 2.2.2 (a)  $(x+2)^2 - 3$  (b)  $(2x-9)^2 + 19$  (c)  $39 - (x+6)^2$
- 2.2.3 (a)  $(x-2)(x+3)$  (b)  $-2(x-1)(x+4)$
- (c)  $(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$  (d)  $x^2 + x + 1$
- 2.2.4 (a)  $x^2 + 3x - 10 = 0$  (b)  $6x^2 - x - 2 = 0$
- (c)  $x^2 - 2x - 4 = 0$
- 2.3.1 (a) 1 och  $-4$  (b)  $6 + 3\sqrt{3}$  och  $6 - 3\sqrt{3}$
- (c) Inga reella lösningar
- 2.3.2 (a)  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  och  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  (b) Inga reella lösningar
- 2.3.3 (a) 9 (b) 2 (c) Ingen rot (d) 2 (e) 4
- (f) 12 (g) 3 (h)  $\frac{5-\sqrt{13}}{6}$  (i) 6
- 2.3.4 (a)  $2, -2, \sqrt{3}$  och  $-\sqrt{3}$  (b)  $5, -5, 7$  och  $-7$  (c)  $2$  och  $-2$
- (d)  $\sqrt{6}$  och  $-\sqrt{6}$  (e)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  och  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$
- 2.3.5 (a) 9 (b)  $19 - 6\sqrt{10}$  (c)  $1$  och  $4$
- 2.4.1 (a)  $x = 3, 5, y = 1$  (b)  $x = 4, y = 1$  (c)  $x = -2, y = 2$
- (d) saknar lösning
- (e) oändligt många lösningar, av formen:  $x = t, y = 3 - 5t$  för alla reella  $t$
- (f)  $s = 3, t = 1$  (g)  $x = 2, y = 3$  (h)  $x = 3, y = 5, z = 2$
- (i)  $x = 10, y = -0,04, z = 0,06$  (j)  $a = -1, b = 1, c = 2$
- (k)  $x = 1, y = -2, z = 3$
- 2.4.2 Han var 48 år.

- 2.5.1 (a)  $\frac{x-1}{x+4}$  (b)  $\frac{x+2}{x^2+2x-3}$
- 2.5.2 (a)  $\{0, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\}$  (b)  $\{-2, 1, 3\}$
- (c)  $\{-2, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\}$  (d)  $\{2\}$
- 2.5.3 (a) 1 är en trippelrot (b) 1 (enkelrot)
- (c) 1 och  $-1$  är trippelrötter
- 2.5.4 (a)  $(x+2)(x-1)(x-3)$  (b)  $(x+2)(x+\frac{5+\sqrt{21}}{2})(x+\frac{5-\sqrt{21}}{2})$
- (c)  $(x-2)(-3+x-x^2)$