

Matematik för sjöingenjörsprogrammet

Matematiska Vetenskaper

29 augusti 2012

Innehåll

5	komplexa tal	150
5.1	Inledning	150
5.2	Geometrisk definition av de komplexa talen	150
5.3	komplexa tal på kartesisk form	153
5.4	Komplexa tal på polär form, komplexa exponentialfunktion.	153

5 komplexa tal

5.1 Inledning

Vilka tal x uppfyller ekvationen $x^2 = 2$? Det är $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$, eller hur? Man kan ganska lätt visa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal, d v s det kan inte skrivas som en kvot mellan heltal. Detta var något som oroade de gamla grekerna. De kände till $\sqrt{2}$ som längden av hypotenusan i en rätvinklig triangel med kateterna av längd 1. De enda tal de ville godkänna var dock de rationella. När de upptäckte att $\sqrt{2}$ inte var rationellt blev de förstås oroliga. Förmodligen är det inget som har oroat dig, och det finns ingen anledning att börja oro sig nu. Matematiker har ju "hittat på" de reella talen som innefattar bl a $\sqrt{2}$ så problemet är löst.

Hur är det då med ekvationen $x^2 = -1$? Denna vet vi att den inte har några reella rötter, eftersom kvadraten av ett reellt tal aldrig kan bli negativt. Finns det anledning till oro? Tja, det har visat sig att man i många lägen faktiskt har nytta också av lösningar som inte är reella och det fina är att det finns en konstruktion av ytterligare tal som bl a ger lösningar till denna ekvation. Precis som man kunde utvidga de rationella talen till alla de reella talen, så kan också de reella talen utvidgas till vad som kallas för de *komplexa talen*.

5.2 Geometrisk definition av de komplexa talen

Som bekant så får vi ju en geometrisk beskrivning av de reella talen med hjälp av tallinjen. För de komplexa talen som vi nu skall konstruera så räcker dock tallinjen inte till utan vi behöver ett tvådimensionellt plan för att representera dem. Precis som att varje reellt tal x svarar mot en punkt på tallinjen så kommer varje komplext tal z att svara mot en punkt (x,y) i talplanet. Vi tänker oss då ett koordinatsystem med en x -axel och en y -axel och att de reella talen utgörs av x -axeln och därmed är en delmängd av de komplexa talen. Idén är nu att införa räkneoperationer för dessa nya tal som uppfyller följande.

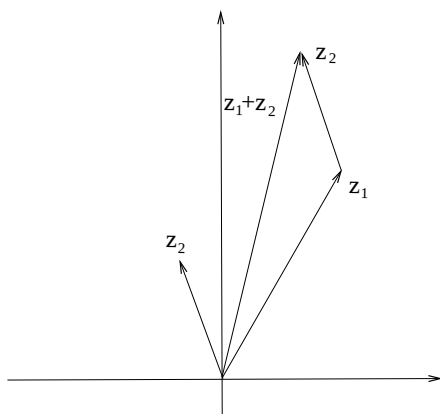
1. För komplexa tal som ligger på x -axeln skall de överensstämma med de räkneoperationer vi redan har för de reella talen.
2. Samma räkneregler som för de reella talen (distributiva och kommutativa och associativa lagar) skall gälla för de komplexa talen.
3. Ekvationen $z^2 = -1$ skall ha lösning bland de komplexa talen.

Det visar säg att detta blir uppfyllt om vi gör på följande sätt.

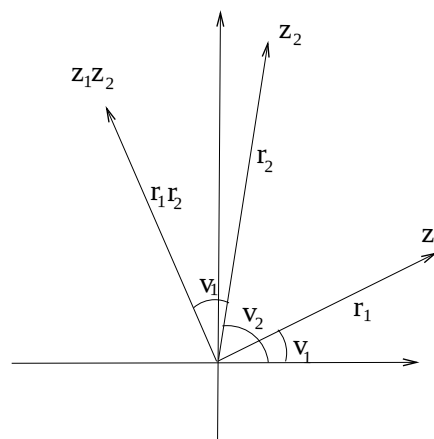
Addition definierar på samma sätt som vi gjorde för geometriska vektorer i förra kapitlet. Se fig.1.

För att definiera *multiplikation* betraktar vi de polära koordinaterna (r, v) för punkter i planet, d v s r är lika avståndet till origo (beloppet av z betraktad som vektor) och v är riktningsvinkeln mellan Ortsvektorn till z och positiva x -axeln. Vi kommer i fortsättningen att kalla riktningsvinkeln för *argumentet* för z som kortsre skrivs $\arg z$. Beloppet skrivs $|z|$. Om då z_1 och z_2 har de polära koordinaterna (r_1, v_1) respektive (r_2, v_2) så definieras produkten $z_1 z_2$ så att $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ och $\arg(z_1 z_2) = v_1 + v_2$ och för kvoten får vi då $|z_1/z_2| = r_1/r_2$ och $\arg(z_1/z_2) = v_1 - v_2$ Med andra ord:

Vid multiplikation mellan komplexa tal *multiplieras beloppen och adderas argumenten*.



Figur 1: Vektoraddition av komplexa tal

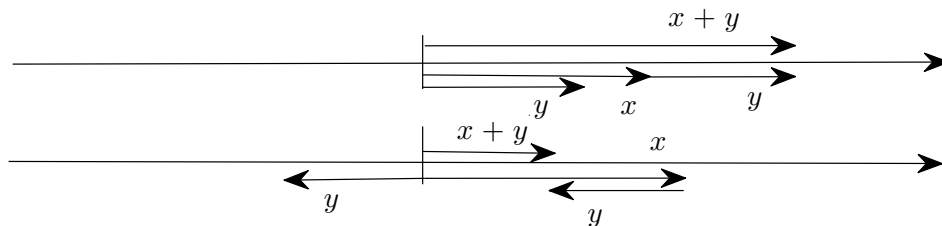


Figur 2: multiplikation av komplexa tal

Anmärkning. $\arg z$ är ju endast bestämt så när som på ett antal hela varv. T ex så har talet -1 både argumentet π och $-\pi$. Trots det så blir produkten som vi definierat entydigt bestämd eftersom olika val av argument för faktorerna endast leder till en skillnad på ett antal hela varv för produkten.

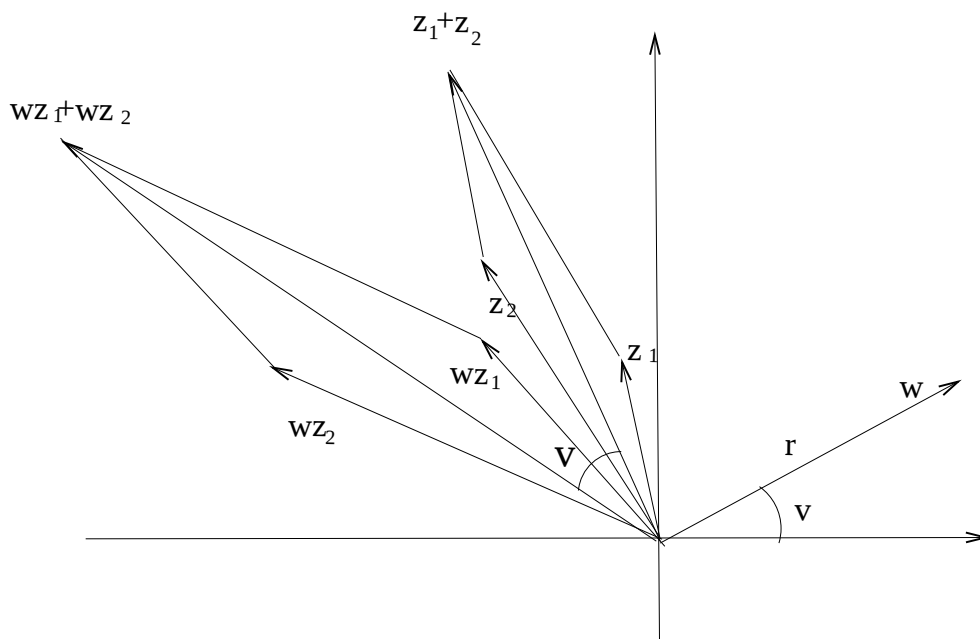
Låt oss nu kontrollera att de tre villkoren ovan är uppfyllda.

1. Att additionen för endimensionella vektorer överensstämmer med additionen för reella tal är uppenbart. (Se figur 3.) Eftersom de positiva reella talen (som delmängd av de komplexa talen) är precis de tal som har argumentet $0 + n2\pi$ och de negativa är de med argumentet $\pi + n2\pi$ så ge vår definition att produkten av två positiva tal liksom produkten av två negativa blir ett positivt tal medan produkten av ett positivt och ett negativt blir negativt. Vi se att att den nya produkten som vi definierat överensstämmer med den gamla vanliga så länge vi håller oss till reella talen (x -axeln).



Figur 3: Vektoraddition på linjen.

2. Att $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ såg vi i kapitlet om vektorer och att $z_1 z_2 = z_2 z_1$ följer direkt från definitionen, så de kommutativa lagarna gäller. Även de associativa lagarna är lätt att verifiera. För att se att den distributiva lagen gäller betraktar vi figur 4. Alla sidor i den vänstra parallelogrammen är vridna vinkeln v och skalade en faktor r jämfört med motsvarande i den högra parallelogrammen. De båda parallelogrammen är därför likformiga och därmed är även vektorn ut till $wz_1 + wz_2$ vriden vinkeln v och skalad en faktor r jämfört med den ut till $(z_1 + z_2)$. Alltså är $wz_1 + wz_2 = w(z_1 + z_2)$. Distributiva lagen gäller alltså.



Figur 4: Distributiva lagen.

3. Om vi betecknar det komplexa tal som har koordinaterna $(0,1)$ för i så gäller att $|i| = 1$ och $\arg i = \pi/2$. Det betyder att $|i^2| = 1$ och $\arg i^2 = \pi$ dvs $i^2 = -1$.

5.3 komplexa tal på kartesisk form

Vi skall nu se att punkterna 1. – 3. ovan leder till ett smidigt sätt att beteckna och räkna med de komplexa talen. I punkt 3. så införde vi beteckningen i för det komplexa talet med koordinaterna $(0,1)$. Talen som ligger på y -axeln, dvs de med koordinater $(0,y)$, kan då skrivas som iy ($= yi$) och kallas för *imaginära tal*. Talet i kallas *imaginära enheten*. En konsekvens av punkt 1. ovan är att för de komplexa talen på x -axeln är det likgiltigt om vi skriver dem som $(x,0)$ eller som bara x . Varje komplext tal med koordinater $(x,y) = (x,0) + y(0,1)$ kan därför skrivas $z = x + iy$ där alltså x är ett reellt tal och iy är imaginärt. Denna framställning av komplexa tal brukar kallas *kartesisk form*. Talet x kallas *realdelen* av z och skrivs $\Re z$ och y kallas *imaginärdelen* som skrivs $\Im z$. Observera att $\Im z$ är reellt medan iy är imaginärt. Med hjälp av räknelagarna (punkt 2. ovan) kan vi nu räkna vanlig algebra med dessa uttryck med tillägget att $i^2 = -1$. Följande exempel illustrerar hur det går till.

Exempel. Låt $z = 2 + 3i$ och $w = 1 - 2i$ vara två komplexa tal. Vi adderar

$$z + w = (2 + 3i) + (1 - 2i) = (2 + 1) + i \cdot (3 - 2) = 3 + i$$

och multiplicerar

$$zw = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2(1 - 2i) + 3i(1 - 2i) = 2 - 4i + 3i - 6i^2 = [i^2 = -1] = 8 - i.$$

Allmänt

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

och (kontrollera)

$$(a + ib)(c + id) = \dots = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

□

Beloppet av ett komplext tal ges med hjälp av Pythagoras sats som

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

För det komplexa talet $z = x + iy$ definierar vi också dess *konjugat* som $\bar{z} = x - iy$. Produkten av ett komplext tal och dess konjugat är

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

5.4 Komplexa tal på polär form, komplexa exponentialfunktion.

Om vi som förut använder beteckningarna r och v för belopp och argument så har vi sampanDET

$$x + iy = r(\cos v + i \sin v),$$

där alltså vänsterledet är det komplexa talet på kartesisk form medan högerledet kallas för *polär form*. Vi såg tidigare att argumenten adderas vid multiplikation av två komplexa tal. Som vi strax skall se så är denna egenskapen förklaring till att man infört beteckningen e^{iv} för uttrycket $\cos v + i \sin v$. Dvs

$$e^{iv} = \cos v + i \sin v.$$

Observera att $|e^{iv}| = |\cos v + i \sin v| = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = 1$, så vi kan skriva

$$e^{iu} e^{iv} = e^{i(u+v)} \quad \text{och} \quad (e^{iu})^n = e^{inu}.$$

där det sista kallas för *De Moivres formel* och kan också skrivas.

$$(\cos(v) + i \sin(v))^n = (\cos(nv) + i \sin(nv))$$

Motiveringen till skrivsättet är alltså att vi får samma räknelagar som för den "vanliga" exponentialfunktionen:

$$e^a e^b = e^{(a+b)} \quad \text{och} \quad (e^a)^n = e^{na}.$$

Ett godtyckligt komplext tal kan då skrivas

$$z = a + ib = r(\cos v + i \sin v) = re^{iv}.$$

Exempel. Låt z och w vara komplexa tal med $|z| = 2$, $|w| = 3$, $\arg z = 3\pi/8$ och $\arg w = \pi/8$. Beräkna talen zw och z/w så explicit som möjligt.

Lösning. Vi vet att $|zw| = |z||w| = 2 \cdot 3 = 6$ och att

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = 3\pi/8 + \pi/8 = \pi/2.$$

Alltså är $zw = 6i$ eftersom argumentet anger att riktningen är längs positiva y -axeln och avståndet till origo är 6.

Vi får också att

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{2}{3}$$

samt

$$\arg(zw) = \arg(z) - \arg(w) = 3\pi/8 - \pi/8 = \pi/4.$$

Argumentet $\pi/4$ betyder linjen $y = x$ så att talet är en positiv multipel av $1 + i$. Beloppet av $1 + i$ är $\sqrt{2}$ så

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) = \frac{2}{3\sqrt{2}}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

i kartesiska koordinater. □

Exempel. Beräkna $(1+i)^{100}$.

Lösning. Man skulle förstås successivt kunna räkna ut $(1+i)^2$, $(1+i)^4$, $(1+i)^8$ etc, men mycket enklare och mer effektivt blir det att använda de Moivres formel. Vi börjar med att skriva $z = 1+i$ med polära koordinater. Vi har att $|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ och $\arg z = \pi/4$. De Moivres formel ger då att

$$\begin{aligned} z^{100} &= \left(\sqrt{2}\right)^{100} \left(\cos\left(\frac{100\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{100\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(2^{1/2}\right)^{100} (\cos(25\pi) + i\sin(25\pi)) = 2^{50}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -2^{50}. \end{aligned}$$

eftersom $\cos(\pi) = -1$ och $\sin(\pi) = 0$. □