

Lösningar till Matematik A för SI1, MVE 335

2010 01 11.

-
1. (a) Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$, dvs $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.
(b) För vinklarna u och v gäller $\sin v = 2/\sqrt{13}$ och $\sin u = 3/\sqrt{13}$. Vilket ger $v = 33.7^\circ$ resp. $u = 56.3^\circ$. Triangelns vinklar är alltså $33.7^\circ, 56.3^\circ$ och 90° .
2. (a) $x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-10)} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{3 \pm 7}{2} \cdot \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$
(b) $10 - 3x - x^2 = -(x^2 + 3x - 10) = [\text{enl. (a) och faktorsatsen}] -(x-2)(x-(-5)) = \underline{(2-x)(x+5)}$
(c) Kvadratkomplettera: $10 - 3x - x^2 = -(x^2 + 3x - 10) = -\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10\right) = \frac{49}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ vars största värde är $\frac{49}{4}$ (För $x = -\frac{3}{2}$).
3. (a) $(x^3 + 9)^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow x^3 + 9 = 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow \underline{x = -1}$.
(b) $\lg(5x-1) + \lg(2x+1) = 2\lg x + 1 \Leftrightarrow \lg(5x-1)(2x+1) = \lg x^2 + \lg 10 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lg(10x^2 + 3x - 1) = \lg 10x^2 \Leftrightarrow 10x^2 + 3x - 1 = 10x^2 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1/3}$
4. Med standardbeteckningar däre $a = 4$, $b = 5$, och $c = 6$ får vi:
(a) cosinussatsen ger $6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cos C$, dvs $\cos C = \frac{16 + 25 - 36}{40} = 5/40 = 1/8$
och $C = 82.8^\circ$. På samma sätt $\cos A = \frac{36 + 25 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ och $A = 41.4^\circ$. $B = (180 - 41.4 - 82.8)^\circ = 55.8^\circ$
(b) Areasatsen ger $\text{Arean} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{4 \cdot 5 \sin 82.8^\circ}{2} = 10 \sin 82.8^\circ = 9.9 \text{ m}^2$
5. (a) Konjugatregeln ger att $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ och vi kan förkorta och få
$$\frac{\frac{a^2-b^2}{a-b} + \frac{a^2-b^2}{a+b}}{\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^2-b^2}{a+b}} = \frac{(a+b) + (a-b)}{(a+b) - (a-b)} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

(b) $\frac{(x^2)^3 + x^{(2^3)} + (x^3)^2}{x^2 x^3} = \frac{x^6 + x^8 + x^6}{x^5} = \frac{2x^6 + x^8}{x^5} = \underline{2x + x^3}$.
6. .
(a) $|w_2 - \overline{w_1}| = |1 + 5i - (2 + 3i)| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
(b) $w_2 z = w_1 \Leftrightarrow z = \frac{w_1}{w_2} = \frac{1 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(1 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 15i^2 + 3i + 10i}{4 - 9i^2} = \frac{-13 + 13i}{13} = \underline{-1 + i}$.
7. Vektorerna
(a) Vi använder skalärprodukt: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta$ vilket ger
 $-2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} \sqrt{1^2 + 3^2} \cos \theta$, dvs $\cos \theta = \frac{13}{\sqrt{29}\sqrt{10}}$ och $\theta = 40.2^\circ$.

(b) Villkor: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$. Med $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ får vi $x_1 + 3x_2 = 0$ dvs $x_1 = -3x_2$ eller $\mathbf{x} = (-3x_2, x_2) = x_2(-3, 1)$. Att $|\mathbf{x}| = 1$ betyder att $|x_2|\sqrt{9+1} = 1$ dvs att $x_2 = \pm 1/\sqrt{10}$
 Svar $(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$. (eller $(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}})$)

8. Med $z = re^{iv}$ och $-8 = 8e^{i(\pi+2n\pi)}$ får vi att $\begin{cases} r^6 = 8 \\ 3v = \pi + 2n\pi \end{cases}$ dvs $\begin{cases} r = \sqrt[6]{8} \\ v = \frac{\pi}{6} + n\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Fig:

Lycka till! /SJ