

Partialbråksuppdelning

Exempel 1

Skriv $x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$ som ett enda bråk:

$$x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x(x+2)(x-1) + 2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2}.$$

Här har vi skrivit om en summa av enkla rationella uttryck till ett enda rationellt uttryck. I många sammanhang vill man göra precis tvärt om, d.v.s skriva om ett rationellt uttryck som summan av så enkla rationella uttryck som möjligt.

Steg ett i en sådan procedur är att genomföra en polynomdivision med rest. Detta gäller om täljarens gradtal är minst lika stor som nämnarens. Annars går man direkt på steg 2. I vårt exempel får vi efter polynomdivisionen kvoten x och resten $x+5$, vilket betyder att vi kan skriva

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2} = x + \frac{x+5}{x^2 + x - 2}.$$

Steg två är nu att dela upp det rationella uttrycket till höger i så kallade *partialbråk* dvs att skriva om det som en summa av bråk med så enkla nämnare som möjligt. För den skull börjar vi med att faktorisera nämnaren så långt som det går. Vi löser därför andragradsekvationen $x^2 + x - 2 = 0$. Det ger oss rötterna 1 och -2 och vi får faktoriseringen $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Vi gör sedan en *ansättning*:

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}. \quad (1)$$

Det gäller nu att bestämma a och b så att höger- och vänsterled blir lika. Multiplicera båda led med $(x-1)(x+2)$ och vi får

$$x+5 = a(x+2) + b(x-1) \quad (2)$$

som vi kan skriva

$$x+5 = (a+b)x + (2a-b)$$

Det leder till ett ekvationssystemet
$$\begin{cases} a+b &= 1 \\ 2a-b &= 5 \end{cases} \quad \text{som har lösningarna } a=2 \text{ och } b=-1.$$

Slutsatsen blir att man kan skriva

$$\frac{x^3 + x^2 - x + 5}{x^2 + x - 2} = x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Anmärkning 1: Det finns ett alternativt sätt att bestämma a och b från ekvation (2). Om vi i tur och ordning sätter $x = -2$ och $x = 1$, dvs de värden på x som gör att parenteserna i högerledet blir 0, så erhåller vi direkt att $-2+5 = b(-2-1)$, dvs att $b = -1$ respektive $1+5 = a(1+2)$ dvs $a = 2$.

Den typ av ansättning som vi gjorde i (1) fungerar alltid i de fall då nämnaren kan faktoriseras i ett antal sinsemellan olika förstagsgradsfaktorer. I vårt exempel var det två olika faktorer. Om vi har tre faktorer så blir det tre termer i högerledet med tre koefficienter att bestämma, och så vidare. Vi kan kalla denna situation för **fall 1**. Vi skall nu beskriva hur ansättningen går till i två andra fall.

Exempel 2 (fall 2).

Partialbråksuppdelat uttrycket $\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$. Vi faktorerar nämnaren:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2.$$

Vi ser att vi får två faktorer $(x - 1)$. Det visar sig att den korrekta ansättningen i detta fall är

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x(x - 1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2},$$

dvs en term med faktorn $(x - 1)$ ensam och en med den faktorn i kvadrat. Vi fortsätter som i förra exemplet med att multiplicera båda sidor med hela den faktorerade nämnaren:

$$2x^2 - 5x + 1 = a(x - 1)^2 + bx(x - 1) + cx \quad (3)$$

vilket vi kan skriva

$$2x^2 - 5x + 1 = (a + b)x^2 + (-2a - b + c)x + a.$$

Det ger ekvationssystemet
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a - b + c = -5 \\ a = 1 \end{cases}$$
 som har lösningarna $a = 1$, $b = 1$ och $c = -2$. Vi får då följande partialbråksuppdelning:

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{(x - 1)^2}.$$

Anmärkning 2: I det förra exemplet såg att man kunde bestämma koefficienterna på ett enklare sätt genom att sätta in vissa värden på x (se anmärkning 1) ovan. I detta fall fungerar inte det fullt ut. I ekvation (3) så kan vi sätta in $x = 1$ respektive $x = 0$ och på så sätt få ut c och a men inte b . (Eller hur?).

Observera att om vi till exempel hade haft faktorn $(x - 1)$ upphöjt till 3 istället så skulle ansättningen innehållit en term $d/(x - 1)^3$ också.

Ett tredje fall som vi skall kunna hantera är då nämnaren innehåller en faktor som är ett andragradsuttryck som ej går att faktorisera, som t.ex $x^2 + 1$ eller $x^2 + 2x + 2$ (som ju kan skrivas $(x + 1)^2 + 1$). Dessa uttryck saknar (reella) rötter och kan därför ej faktoriseras.

Exempel 3 (fall 3).

Partialbråksuppdelat uttrycket $\frac{x + 1}{x^3 + x}$. Vi faktorerar nämnaren, $x^3 + x = x(x^2 + 1)$, och gör sedan ansättningen

$$\frac{x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

dvs vi ansätter ett godtyckligt 1:a-gradsuttryck, $bx + c$, över andragrads-nämnaren. Sedan fortsätter vi som tidigare med att multiplicera med $x(x^2 + 1)$

$$x + 1 = a(x^2 + 1) + (bx + c)x = (a + b)x^2 + cx + a$$

och ekvationssystemet blir
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$
 som har lösningarna $a = 1$, $b = -1$ och $c = 1$.

Vi får partialbråksuppdelningen:

$$\frac{x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Övningar på partialbråksuppdelning

Partialbråksuppdelna följande rationella uttryck.

1. $\frac{1}{x^2 + x}.$

2. $\frac{x^2 + 4x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$

3. $\frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2}.$

4. $\frac{x^3 + 3x + 1}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$

5. $\frac{x + 1}{x^3 + x^2 + x}.$

Svar till övningarna

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}.$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}.$

3. $x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x - 1}.$

4. $1 + \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 1}.$

5. $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + x + 1}.$