MVE340 Matematik B för Sjöingenjörer
2010/2011
Läsvecka 5
Deltenta 3

Omfattning

- Emanuelsson:
  - Kapitel 5: Differentialekvationer

Kapitel 5: Differentialekvationer

Viktiga begrepp

- Separabel differentialekvation
- Linjär differentialekvation av första ordningen
- Linjär differentialekvation av andra ordningen
- Homogen/inhomogen differentialekvation
- Partikulärlösning, allmän lösning

Mål kapitel 5

För betyget godkänd skall du kunna:
5.1 avgöra om en given funktion är lösning till en given differentialekvation
5.5 lösa en linjär andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$
För högre betyg skall du dessutom kunna:
5.2-3 lösa en separabel differentialekvation

$$f\big(y(t)\big)y'(t) = g(t)$$

där integralerna motsvarar tidigare mål för högre betyg
5.3 lösa en linjär första ordningens differentialekvation

$$y'(t) + f(t)y(t) = g(t)$$

där integralerna motsvarar tidigare mål för högre betyg
5.5 lösa en linjär andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = sin(\omega t)$
5.6 själv kunna ställa upp en differentialekvation utgående från fysikens lagar

Differentialekvationer

- En differentialekvation är en ekvation som innehåller en okänd funktion $y(t)$ (eller $y(x), y(h)$ som exempel) och derivator av denna funktion, $y'(t), y''(t)$ osv.
- Exempel:
- $y'(t) = \sin(t)$
- $y'(t) = y(t)\sin(t)$
- $y'(t) + 2ty(t) = e^{-t^2}$
- $y'(t) = 2y(t)$
- $4y''(x) + 8y'(x) + 8y(x) = 0$
- $4y''(t) + 8y'(t) + 8y(t) = \sin(2t)$
- Ofta utelämnas variabeln om den ändå kan anses känd:
- $y^{(4)} + 2y'' + 2y = 0$

Lösning till differentialekvation

- Med en partikulärlösning till en differentialekvation menas **en** funktion som satisfierar ekvationen.
- Exempel: $\mathrm{y(t)} = -\cos(2t)$ är partikulärlösning till differentialekvationen $\mathrm{y'(t)} = 2\sin(2t)$
- Med allmänna lösningen till differentialekvationen menas att man ger **alla** lösningar till ekvationen
- Exempel: $\mathrm{y(t)} = -\cos(2t) + C$ är allmänna lösningen till differentialekvationen

$$\mathrm{y'(t)} = 2\sin(2t)$$

Begynnelsevillkor, randvillkor

- Oftast ges inte bara ekvationen utan också något/några bivillkor.
- Om den sökta funktionen är en funktion av tiden, t, skall oftast några begynnelsevillkor vara uppfyllda, t.ex. $y(0) = 0, y'(0) = v_0$
- Om den sökta funktionen är en funktion av en rumsvariabel, x, skall oftast några randvillkor vara uppfyllda t.ex. $y(0) = 0, y(L) = b$
- I allmänhet är villkoren sådana att endast en funktion satisfierar differentialekvation och övriga villkor.

Intressanta differentialekvationer 1

Två kroppar på avståndet r med massorna m_1 och m_2, påverkar varandra med en attraherande kraft, gravitationen $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ där G är universella gravitationskonstanten.

Nära jordklotet är kraften som påverkar en kropp med massa m, $F = mg$ där $g \cong 9.8$

Vid fritt fall i vacuum (i laboratorieexperiment på jorden) påverkas den fallande kroppen enbart av gravitationen.

- En kropp som faller från höjden h m öh har vid tiden t fallit $s(t)$ m och har hastigheten $v(t)$ m/s och accelerationen $a(t)$ m/s^2. Här är $a(t) = v'(t)$ och $v(t) = s'(t)$.

Newtons lag, $F = ma$, ger då: $ma(t) = mg$.

Detta ger oss två differentialekvationer

$$v'(t) = g, v(0) = 0 \text{ och}$$
$$s''(t) = g, s(0) = 0, s'(0) = 0$$

Intressanta differentialekvationer 2

Vid fall med luftmotstånd tillkommer en kraft som är motriktad rörelsen. I den enklaste modellen anses kraften vara proportionell mot hastigheten. (Samma modell används ofta för dämpare av olika typ.)

Newtons lag ger nu $ma(t) = mg - cv(t)$

Detta leder till differentialekvationerna:

$$mv'(t) = mg - cv(t) \text{ och}$$
$$ms''(t) = mg - cs'(t)$$

Intressanta differentialekvationer 3

Bakteriekulturer växer genom att cellerna i kulturen delar sig. En modell som beskriver många sådana kulturer är att under en sekund (eller annat lämpligt kort tidsintervall) kommer en bestämd andel, p, av cellerna att dela sig. (Man får då tänka sig att det inte nödvändigtvis är ett helt antal celler.)

Om det vid tidpunkten t finns $y(t)$ celler så finns det vid tidpunkten $t + \Delta t$

$y(t + \Delta t) \cong y(t) + py(t)\Delta t$ celler.

- Tillväxthastigheten $y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = py(t)$
- Om antalet celler är 100 vid starten har vi ett begynnelsevillkor:

$$y'(t) = py(t), y(0) = 100.$$

Intressanta differentialekvationer 4

Radioaktivt sönderfall.

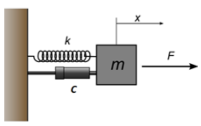
- Här används en modell liknande den vid bakterietillväxt: en viss andel av atomerna sönderfaller under en viss tidsrymd.

Differentialekvationen är i detta fall:

$$y'(t) = -py(t), y(0) = M$$

Intressanta differentialekvationer 5

- Dämpad fjäderrörelse:



- Fjädern ger upphov till en kraft, F_s, riktad mot neutralläget och proportionell mot fjäderns förlängning/kontraktion: $F_s = -kx(t)$.
- Dämparen ger upphov till en kraft motriktad rörelsen och proportionell mot farten: $F_D = -cx'(t)$
- Newtons lag ger nu: $mx''^{(t)} = -cx'(t) - kx(t) + F(t)$
- Med begynnelsevillkor:

$$mx''^{(t)} + cx'(t) + kx(t) = F(t),$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = v_0$$

Intressanta differentialekvationer 6

- Odämpade svängningar i en sträng beskrivs bäst av en partiell differentialekvation $Ku''_{xx} = mu''_{tt}$ som vi inte kan gå in på här men ändå beskriva något.
- Om strängen är fast i båda ändpunkterna, som en gitarrsträng, kommer den att svänga med en grundfrekvens som beror av strängens längd, spänningen i strängen och strängens massa. Dessutom förekommer övertoner, frekvenser som är multipler av grundfrekvensen. Varje ton beskrivs av en produkt av funktioner $u(x,t) = f(x)y(t)$
- Amplituden $f(x)$ varierar längs strängen, den är 0 i ändpunkterna som ju sitter fast. Man kan visa att om strängens längd är L så ges amplituden för grundtonen av $f(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$. För övertonerna är amplituderna $f_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.
- Om vi bortser från amplitudvariationen längs strängen och bara ser på hur varje punkt på strängen rör sig i tiden så beskrivs detta av differentialekvationen

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \text{ där } \omega = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

- Om en yttre kraft påverkar strängen beskrivs svängningen istället av

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = F(t)$$

Harmoniska svängningar

- Den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

är

$$y_h(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$

- En partikulärlösning till

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = Bsin(\alpha t)$$

är

$$y_p(t) = \frac{B}{\omega^2 - \alpha^2} sin(\alpha t) \text{ om inte } \alpha = \omega$$

- Den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = Bsin(\alpha t), \alpha \neq \omega$$

är

$$y(t) = Asin(\omega t + \varphi) + \frac{B}{\omega^2 - \alpha^2} sin(\alpha t)$$

Resonans

- En partikulärlösning till

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = Bsin(\omega t)$$

är

$$y_p(t) = \frac{B}{2\omega} tsin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

- Den allmänna lösningen till differentialekvationen är i detta fall

$$y(t) = Asin(\omega t + \varphi) + \frac{B}{2\omega} tsin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Svävning

- Lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = Bsin(\alpha t),$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

är

$$y\,(t) = \frac{B}{\omega^2 - \alpha^2}\left(sin(\alpha t) - \frac{\alpha}{\omega} sin(\omega t)\right)$$

om inte $\alpha = \omega$

- Denna lösning kan skrivas om med hjälp av diverse trigonometriska samband till uttryck på formen:

$$y\,(t) = C_1 \sin\left(\frac{\alpha - \omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\alpha + \omega}{2} \mathrm{t}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\alpha + \omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\alpha - \omega}{2} \mathrm{t}\right)$$

Dämpning

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$$

har karakteristisk ekvation

$$ms^2 + cs + k = 0$$

vars rötter är

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Allmänna lösningen till ekvationen är alltså om de två rötterna är olika:

$$x(t) = Ae^{\frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t} + Be^{\frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}t}$$

Tre olika situationer:

$$c^2 - 4mk > 0, c^2 - 4mk = 0, c^2 - 4mk < 0$$

Dämpning 2

- Överkritisk dämpning, $c^2 - 4mk > 0$,

båda rötterna är reella, lösningen på formen

$$x(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

- Kritisk dämpning, $c^2 - 4mk = 0$, en reell dubbelrot lösning på formen

$$x(t) = e^{-ct}(A + Bt)$$

- Underkritisk dämpning, $c^2 - 4mk < 0$,

$x(t) = e^{-ct} Asin(\omega t + \varphi)$ där $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$