Tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2012-05-24 8.30–12.30

Examinator: Oscar Marmon , Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt och rond: Oscar Marmon , telefon: 772 5889

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 5 poäng på varje uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkänddelen. Erhållen poäng på årets deltentor får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 25/5. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Information om granskning meddelas via e-post då tentan är rättad.
Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

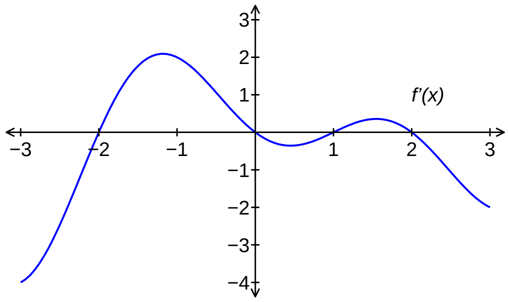
1. (a) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	0.0	7.6	5.7	0.6	-1.7	-1.0	-0.1

Skissa grafen till f och finn ett närmevärde till $f(1.8)$ med linjär interpolering.

(b) Låt $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till f:s graf i den punkt där $x = 0$. (4p)

(c) Nedanstående graf visar **derivatan** $f'(x)$. Ange i vilka intervall funktionen $f(x)$ är växande respektive avtagande. (2p)



2. (a) Skissa grafen till $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ på intervallet $[-2, 2]$. Ange alla lokala maxima och minima samt funktionens största och minsta värde på intervallet. (3p)

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.1$. (2p)

(c) Beräkna arean av det begränsade området mellan graferna till $f(x) = x^2 - 5$ och $g(x) = 3 - x^2$. (Rita gärna en figur.) (3p)

3. (a) En av de följande tre funktionerna är en lösning till differentialekvationen (2p)

$$y' - 2y = 2 - e^t.$$

Avgör vilken. (Motivera ditt svar.)

$$f(t) = 2 - e^{2t} \qquad g(t) = e^{2t} + e^t - 1, \qquad h(t) = \sin t - e^t.$$

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + 3y = 0$ som uppfyller $y(0) = 5$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 6y' + 10y = 0$ som uppfyller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (4p)

4. (a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 9 \\ 2x + 4y - z = 8 \end{cases}$ (2p)

(b) Avgör vilka av vektorerna $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$ och $\mathbf{w} = (1, 2, 1)$ som är ortogonala (vinkelräta) mot varandra. (2p)

(c) Ange en ekvation för planet som går genom punkten $(1, 1, -1)$ och är ortogonalt mot vektorn $(3, 2, 1)$ (2p)

(d) Bestäm skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (0, 1, 1) + t(1, 1, 0)$ och planet $2x + 3y - 3z = 5$. (2p)

Överbetygsdelen

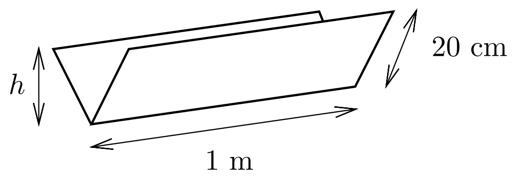
Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. En hungrig student sätter in en stek i en ugn på 175°C. Stekens innertemperatur $y(t)$ vid tiden t kan då antas uppfylla differentialekvationen (6p)

$$y' = k(175 - y)$$

för någon konstant k. Bestäm den allmänna lösningen till denna (separabla) differentialekvation. Om stekens temperatur är 8°C då den sätts in, och 16°C efter 10 minuter, hur lång tid tar det innan temperaturen uppnår 70°C?

6. Man vill tillverka en V-formad ränna genom att bocka en rektangulär plåt med dimensionerna 40 cm × 1 m på längden, se figur nedan. Bestäm det värde på rännans höjd h som gör att rännans volym blir maximal. (6p)



7. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = \sin x$, $y = x \sin x$ och de lodräta linjerna $x = 0$ och $x = \pi$. (Rita figur och tänk noga igenom hur området ser ut!) (6p)

Lycka till!
Oscar Marmon

Formelblad för MVE340, 11/12

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$

Deriveringsregler

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa enligt $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt \qquad \int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}$$