Tentamen
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del 2

2011-08-26 8.30–12.30

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Carl-Henrik Fant , telefon: 772 5878

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkäntdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor eller tentamen våren 2011 får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på denna tentamen.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas via e-post, efter detta sker granskning måndag och torsdag 9-13, MV:s expedition, Lindholmen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

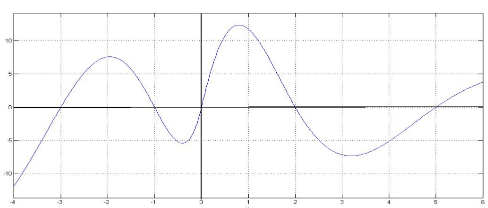
Godkänddelen

1. (a) Till en funktion f har man vidstående värdetabell. Beräkna närmevärden till $f(-3.6)$ och $f(3.6)$. (2p)

x	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	3.8	1.6	0.6	0.2	-0.2	-1.2	-3.4

(b) Bestäm skärningspunkten mellan x-axeln och tangenten till grafen till $f(x) = x^4 - 4x^2 - 13x + 29$ i den punkt på grafen där $x = 2$. (4p)

(c) Vidstående graf visar **derivatan** $f'(x)$. Ange i vilka intervall funktionen $f(x)$ är växande respektive avtagande. (2p)



2. (a) Rita grafen till $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ på intervallet $[-3, 5]$. Ange funktionens lokala extrempunkter (max och min) samt största och minsta värde på intervallet. (4p)

(b) Bestäm en rot i intervallet $(0, 1)$ till ekvationen $x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$ med Newtons metod. Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.01$ (2p)

(c) Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-3}^{0} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10)dx$. (2p)

3. (a) Lös differentialekvationen $x''(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3$. (4p)

(b) Lös differentialekvationen $x''(t) + 10x'(t) + 169x(t) = 0, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3$. (4p)

4. (a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

(b) Ange en ekvation för linjen som går genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(2, 1, 1)$. (2p)

(c) Avgör om linjen genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(2, 1, 1)$ och linjen genom punkterna $(1, -1, -2)$ och $(4, -4, -1)$ skär varandra under rät vinkel. (2p)

(d) Bestäm en vektor som är vinkelrät mot vektorerna $(1, 2, 3)$ och $(1, 0, -1)$ (2p)

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^3}dx.$ (3p)

(b) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 e^{3x} dx.$ (3p)

7. En låda har kvadratisk botten och saknar lock. Den har volymen 32 cm^3. Bestäm lådans mått så att sidornas och bottenytans area tillsammans är så liten som möjligt. (6p)

8. Avgör om det finns något plan som innehåller linjerna med ekvationer (6p)

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}.$$

Bestäm i så fall en ekvation för det planet.

Lycka till!
Carl-Henrik Fant

Trigonometri.

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \qquad \tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \qquad \sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$$

Linjär interpolation

$a<c<b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c)\approx f(a)+\dfrac{c-a}{b-a}\,(f(b)-f(a))$

Gränsvärden

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Deriveringsregler

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x) \qquad (kf(x))'=kf'(x) \qquad (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$$

Några elementära funktioners derivator

$$D\left(x^p\right)=px^{p-1} \qquad D\left(e^x\right)=e^x \qquad D\left(e^{cx}\right)=ce^{cx} \qquad D\left(a^x\right)=a^x\ln a$$

$$D\left(\ln x\right)=\frac{1}{x} \qquad D\left(\sin x\right)=\cos x \qquad D\left(\cos x\right)=-\sin x \qquad D\left(\tan x\right)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Lösning till ekvationen $f(x)=0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0, upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \qquad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad a\neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x+C \qquad \int \cos x dx = \sin x+C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x+C \qquad \int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot x+C$$

$$\int e^x dx = e^x+C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad 0<a\neq 1$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t)+cx'(t)+kx(t)=0$ har den allmänna lösningen $x(t)=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1\neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2+cs+k=0$, ($m,\ c,\ k$ konstanter). Om $s_{1,2}=a\pm ib$ så är $x(t)=e^{at}\left(C_1\cos(bt)+C_2\sin(bt)\right)$. Om $s_1=s_2$ så är $x(t)=e^{s_1t}\left(C_1+C_2t\right)$

Vektor(kryss)produkt

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3)=(u_2v_3-u_3v_2,-(u_1v_3-u_3v_1),u_1v_2-u_2v_1)=\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$